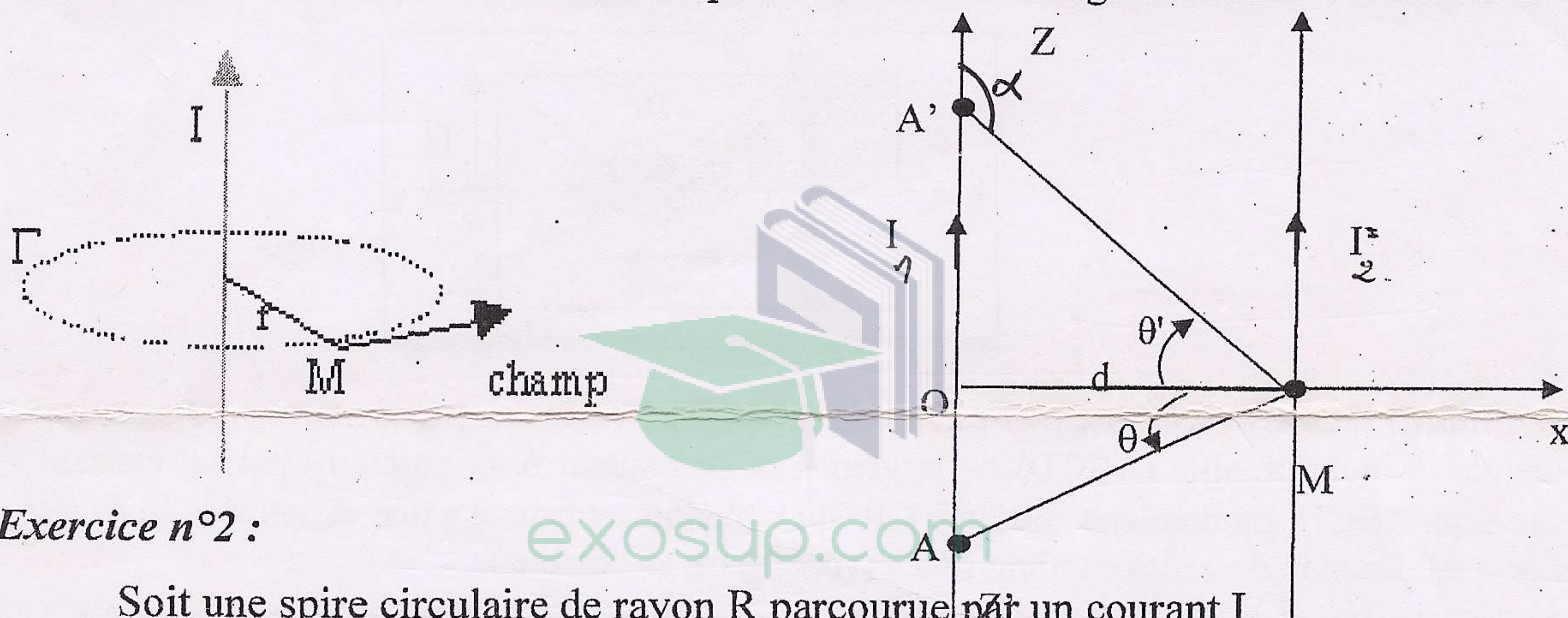


TD1 de E2 : Magnétostatique

Exercice n°1 :

Un fil rectiligne AA' de longueur L est parcouru par un courant d'intensité I.

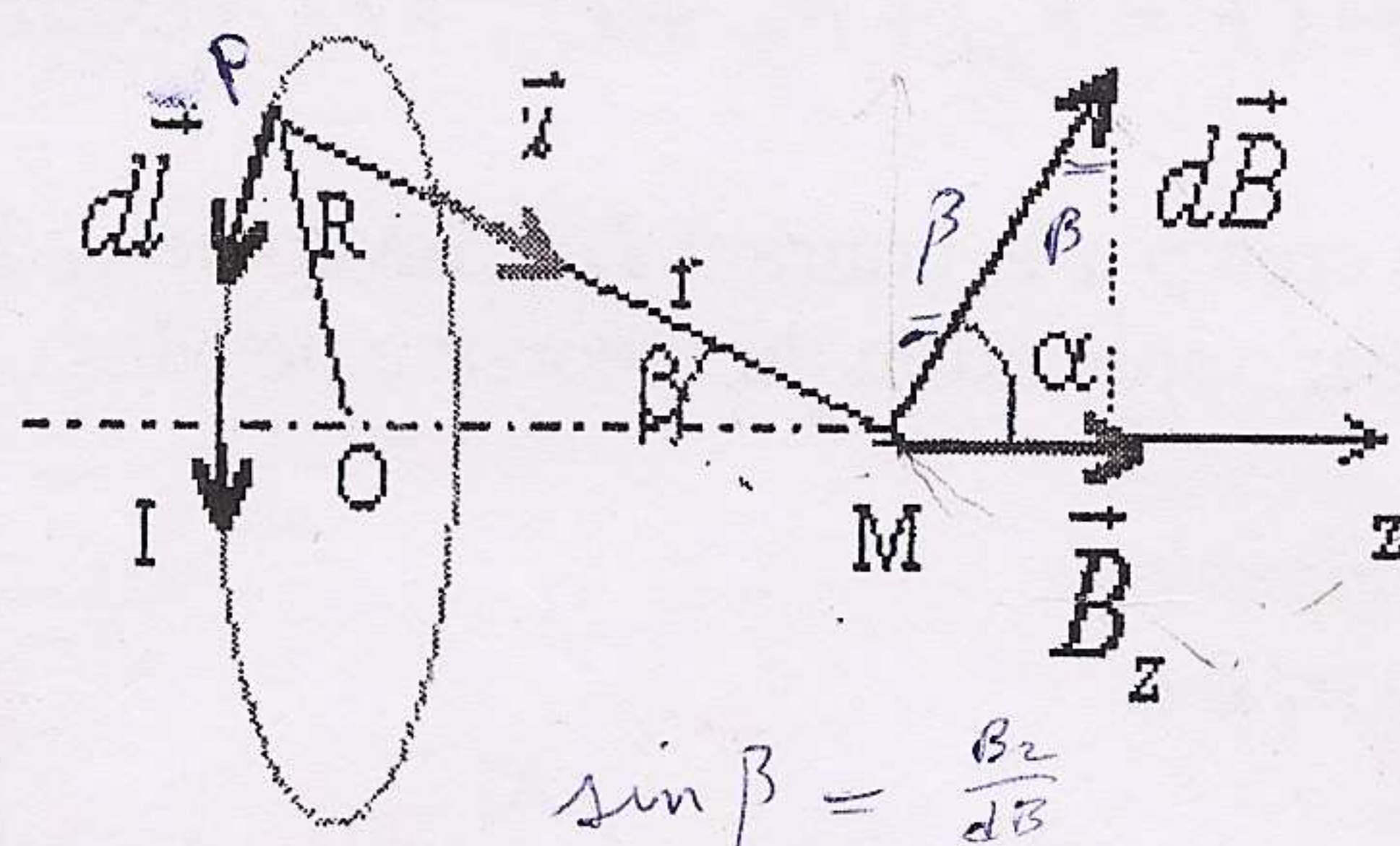
- Déterminer l'induction magnétique $\vec{B}$ créée par ce fil en un point M situé à une distance d du fil en fonction de d et des angles algébriques θ et θ' . (voir figure 1)
- En déduire l'expression de B pour un fil rectiligne indéfini.
- Retrouver le résultat de b) par application du théorème d'Ampère sur un contour Γ .
- Déterminer la force de Laplace qui s'exerce entre deux fils de courants rectilignes, indéfinis, parallèles d'intensités I et I' de même sens.
- Déterminer le potentiel vecteur créé par un courant rectiligne indéfini d'intensité I.



Exercice n°2 :

Soit une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant I.

- Calculer l'induction magnétique en un point M de l'axe repéré par l'angle β et par



OM=z (figure 2)

Figure 2

- En déduire l'induction magnétique au centre de la spire.
- Calculer le champ magnétique en un point M du plan de la spire située à une distance x très petite devant R.

Handwritten notes:

$$\sin \beta = \frac{B_z}{B}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\pi = \alpha + \beta$$

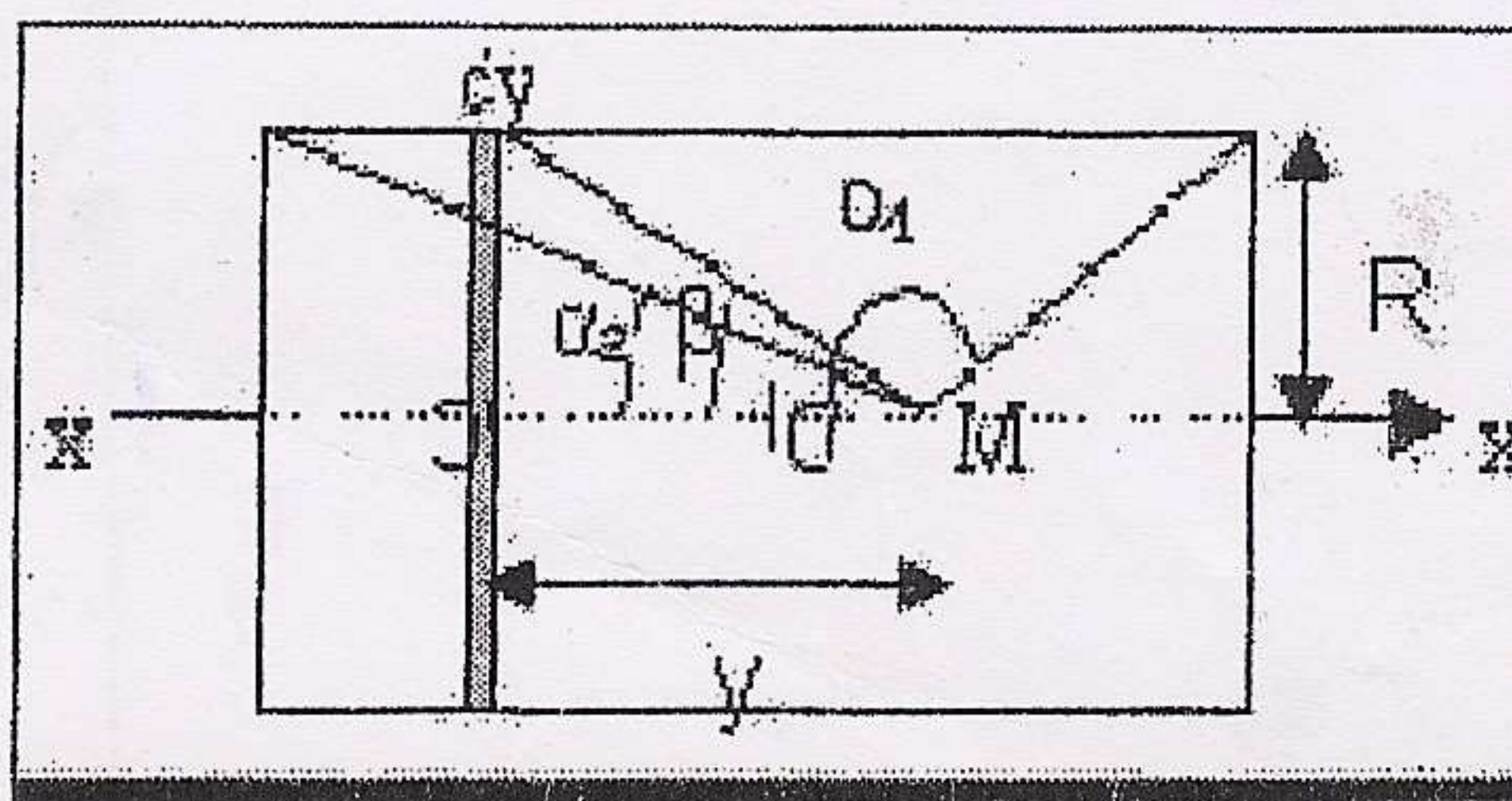
$$\frac{\pi}{2} = \alpha + \beta$$

$$\pi = \alpha + \beta$$

Exercice n°3:

Un solénoïde est théoriquement un ensemble de spires circulaires très fines, jointives, mais isolées, ayant le même axe, même rayons et parcourues par un courant dans le même sens.

- Calculer l'induction magnétique en un point de l'axe d'un solénoïde mince de longueur finie. Pour cela, on décompose le solénoïde en petites bandes de largeurs dl , assimilables à ces spires parcourues par le courant ($nIdl$); avec n est le nombre de spires par unité de longueur de solénoïde. Puis, on fait la somme vectorielle de ces inductions élémentaires.
- En déduire B pour un solénoïde indéfini. Montrer que cette induction est nulle à l'extérieur de ce solénoïde en appliquant le théorème d'Ampère.
- Calculer le potentiel vectoriel à l'extérieur du solénoïde.



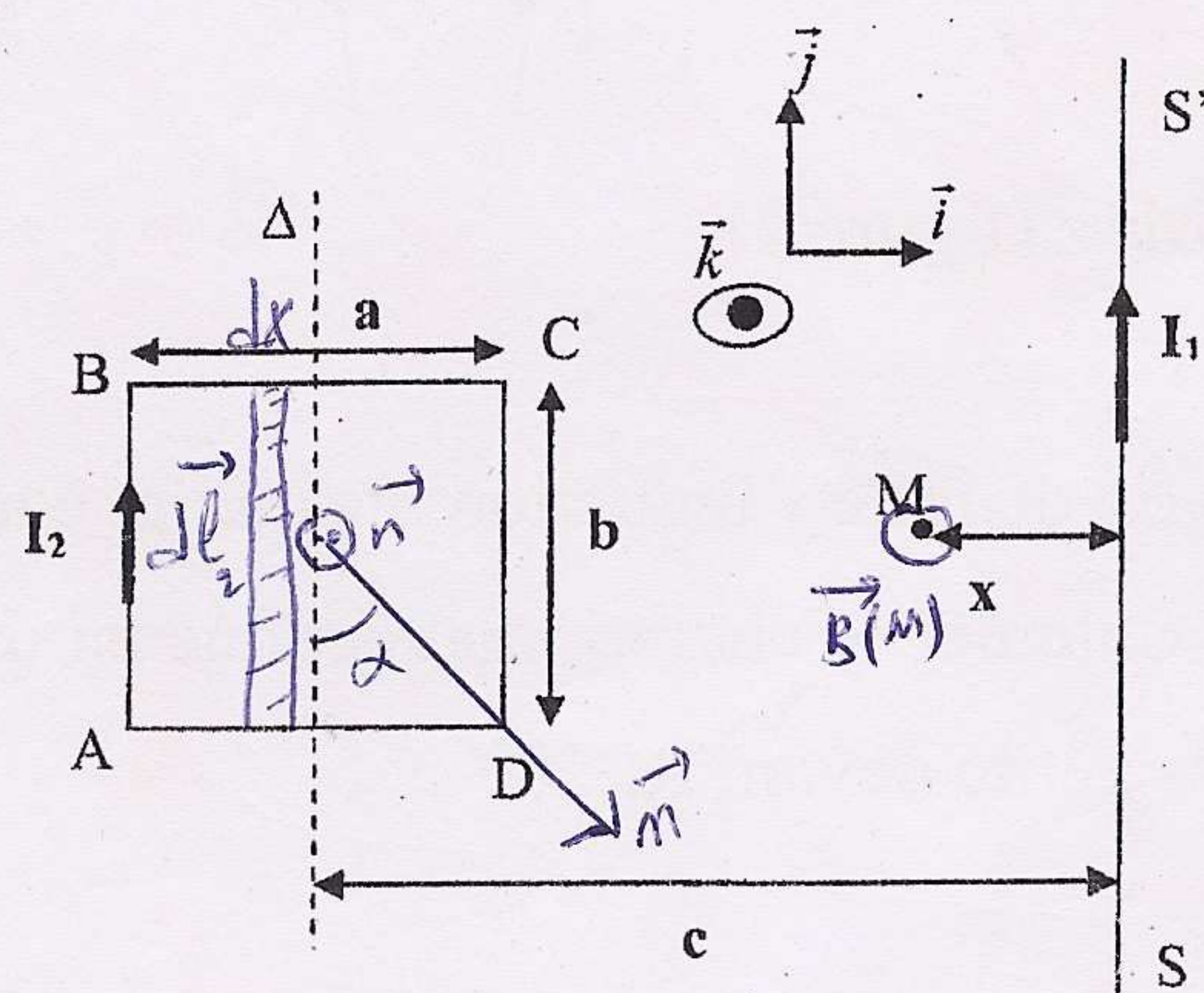
Exercice 4 :

Soit un fil rectiligne vertical (SS') infiniment long est parcouru par un courant I_1 . Un cadre rectangulaire indéformable ($ABCD$) de largeur a et de hauteur b , et parcouru par un courant I_2 dans le sens $ABCD$. La médiane verticale (Δ) (du rectangle se trouve à une distance c de fil (SS') avec ($c > a$). Le plan du cadre contient (SS') (voir figure ci-dessous).

- Donner la direction, le sens et le module du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par le fil (SS') en un point M situé à une distance x du fil.
- Quelle est la résultante totale des forces ($\vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DA}$) exercées par le fil (SS') sur le cadre ($ABCD$).
- Calculer le flux du champ magnétique créé par le courant I_1 à travers le cadre ($ABCD$).
- Retrouver le résultat de la **question 2** par application du théorème de Maxwell.

Pour la suite, on suppose que les dimensions du cadre (a et b) sont très petites par rapport à c .

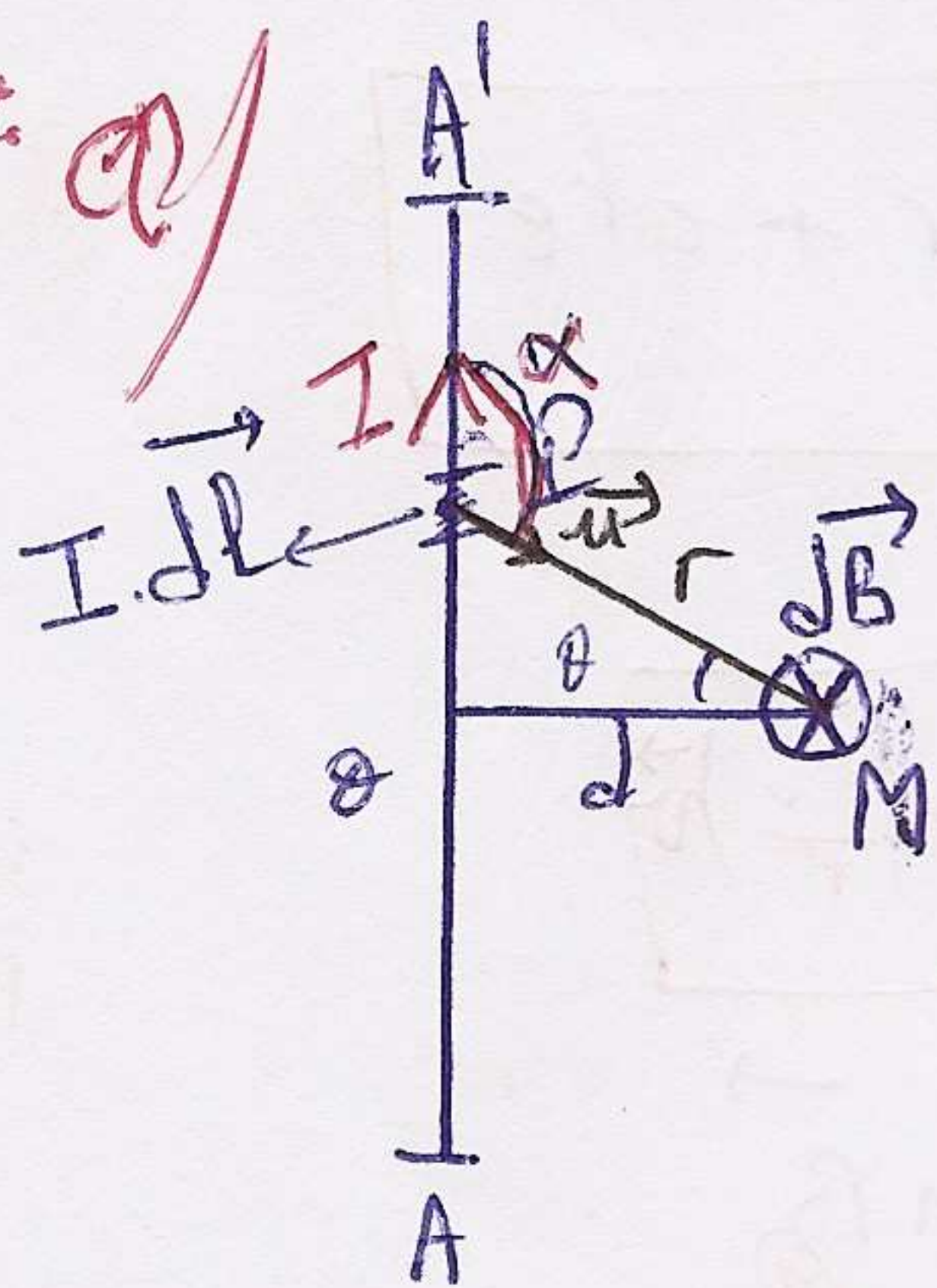
- Calculer le flux du champ magnétique créé par (SS') à travers le cadre.
- On fait tourner le cadre $ABCD$ d'un angle α autour de sa médiane (Δ).
 - Calculer le flux du champ magnétique à travers le cadre dans sa position finale.
 - Calculer le travail mis en jeu dans le cas où $\alpha = \pi$.



$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exercice 1 : a)

fil fini



$$\vec{B}(M) = f(I, d, \theta, \theta')$$

vecteur induction magnétique élémentaire $d\vec{B}(M)$ crée par l'élément de courant $(I dl)$ en M

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$$

$$d\vec{B} \perp \text{plan}(\vec{dl}, \vec{u})$$

donc : $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin(\vec{dl}, \vec{u})$ on a $\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$

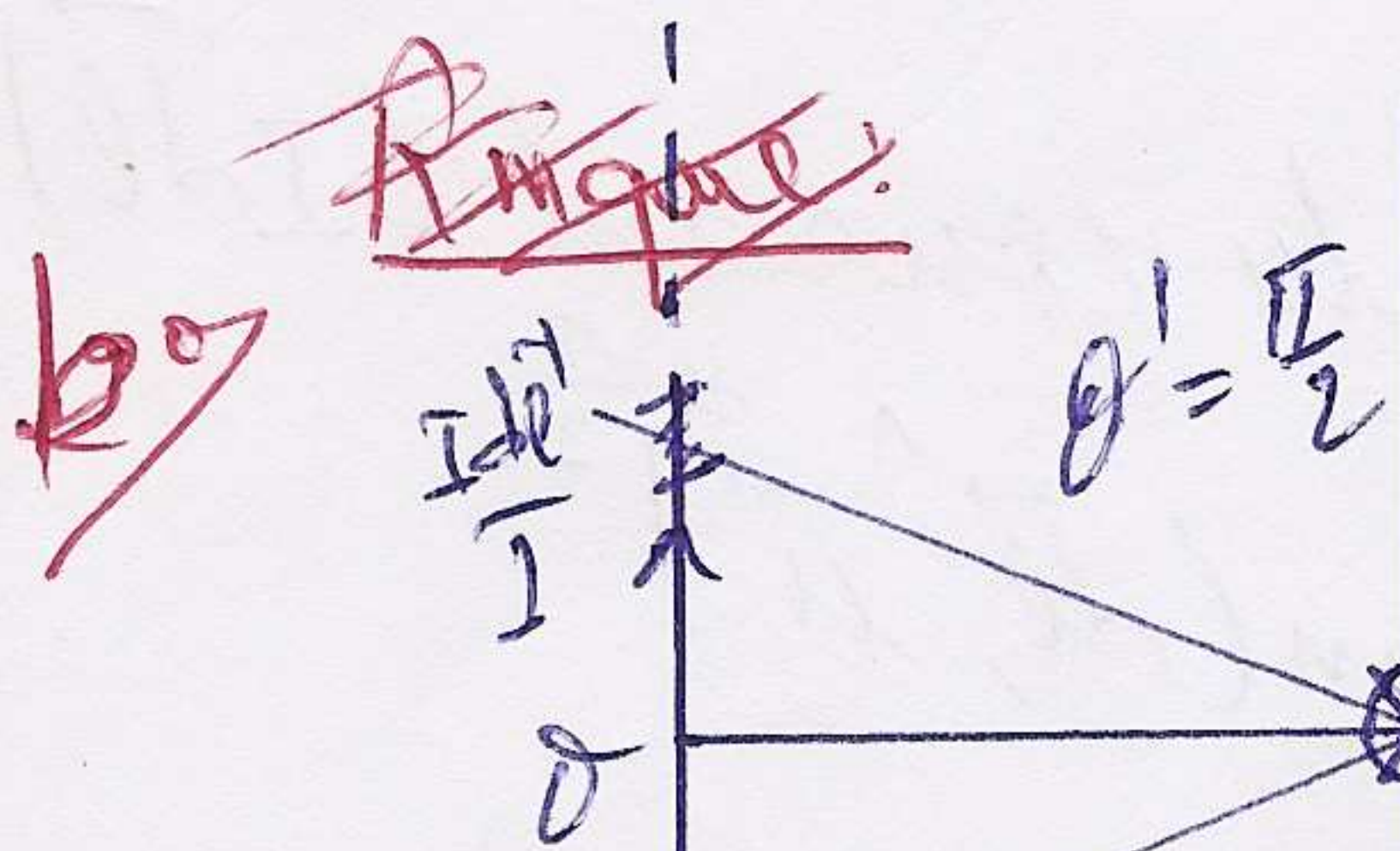
$$dB(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cos \theta$$

on a : $\tan \theta = \frac{l}{d} \Rightarrow dl = \frac{d}{\cos^2 \theta} d\theta$ et $r \cos \theta = d$

$$dB(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{d^2} \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_{\theta}^{\theta'} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} [\sin \theta' - \sin \theta]$$

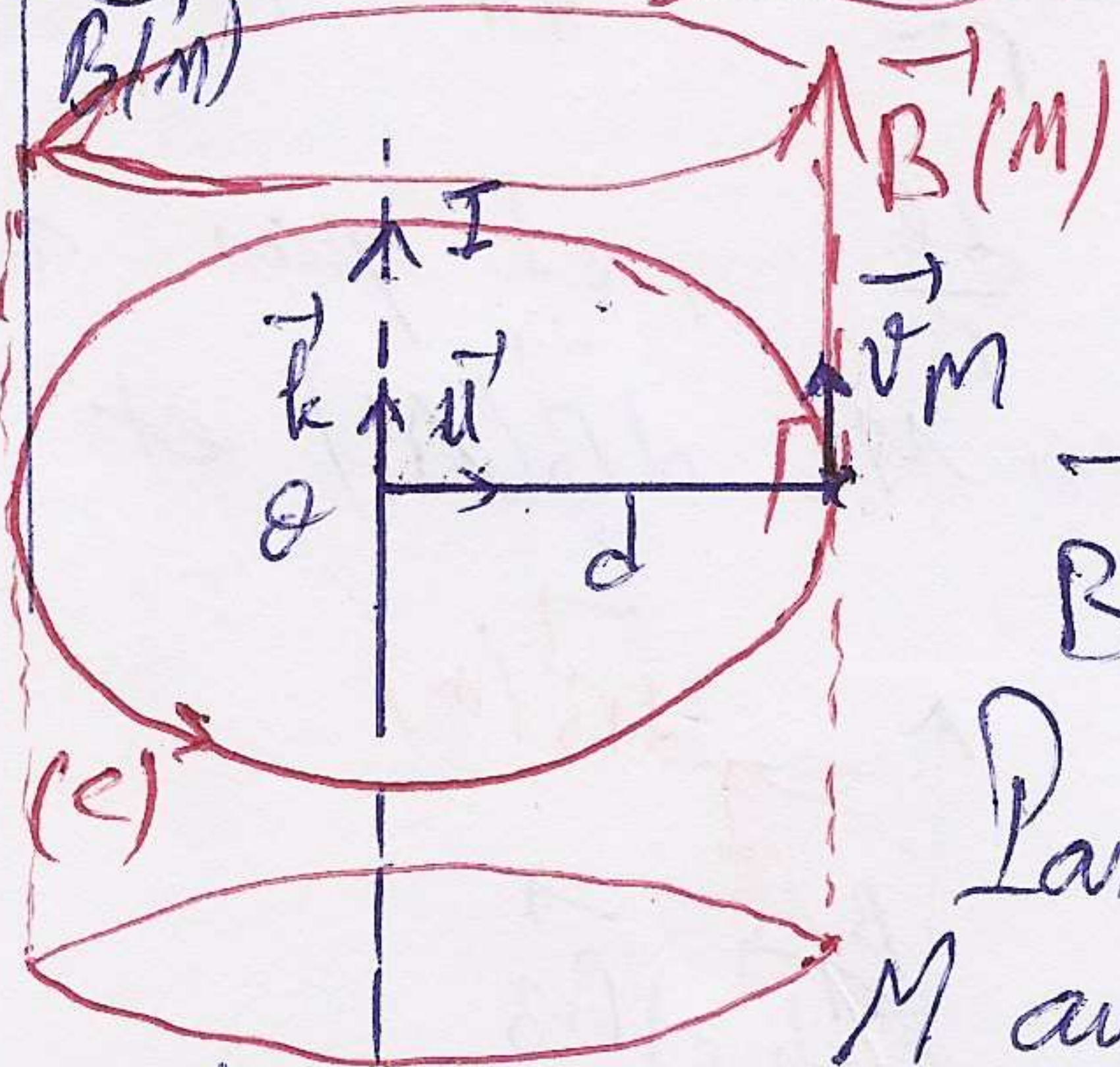
$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \theta' - \sin \theta)$$



$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{v}$$

fil indéfini.

b) Th. d'Ampère :



tg's : $\vec{B}(M) \perp \text{plan}(\vec{dl}, \vec{u})$

$\vec{B}(M)$ est tgt au cercle (C)

Par raison de symétrie, si on fait tourner M autour du fil, on décrit un cercle de centre O qui passe le fil, et de rayon, $OM = d$.

$\Rightarrow$ La ligne de champ magnétique est le cercle (C).

Par conséquent : $\vec{B}(M) = B(r) \vec{v}$ ($\vec{B}$: vecteur radial).

$$\oint_C \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I = +\mu_0 I \Rightarrow B(M) \int dl = B(M) \cdot 2\pi d$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{v}$$

c) $\vec{E}(M) = -\text{grad } V(M)$

$$\vec{B}(M) = \vec{r} \otimes \vec{A}(M) \Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l}}{r}$$

$$\vec{B}(M) = \text{rot } A(r) \cdot \vec{k} = A(r) \text{rot } \vec{k} + \text{grad } A(r) \wedge \vec{k} = \frac{dA(r)}{dr} \vec{u}_r \wedge \vec{k} = -\frac{dA(r)}{dr} \vec{v} \\ = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{v}$$

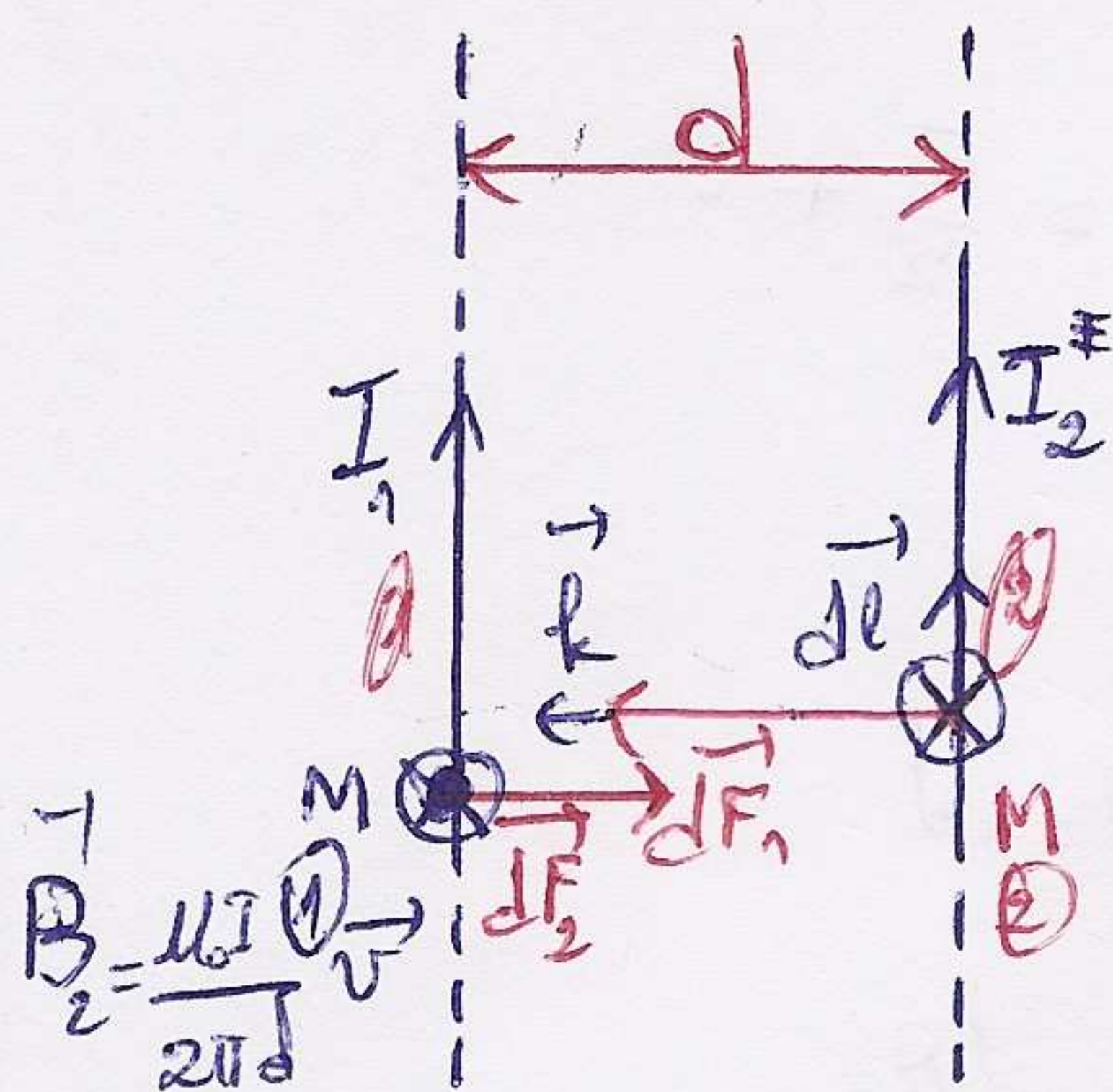
$$\Rightarrow A(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + \text{cte}$$

N.B.: On peut prendre $\text{cte} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_0$

$$\Rightarrow \vec{A}(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \vec{v}$$



d/ Force de Laplace:



$$d\vec{F}(M) = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{v}$$

N.B.: pt. M appliquer au milieu de l_2 , donc:

$$\vec{F}(M) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l_2}{2\pi d} \vec{v}$$

Dans ce cas: $d\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} d\vec{l}_2 \cdot \vec{k}$

Exercice 2:

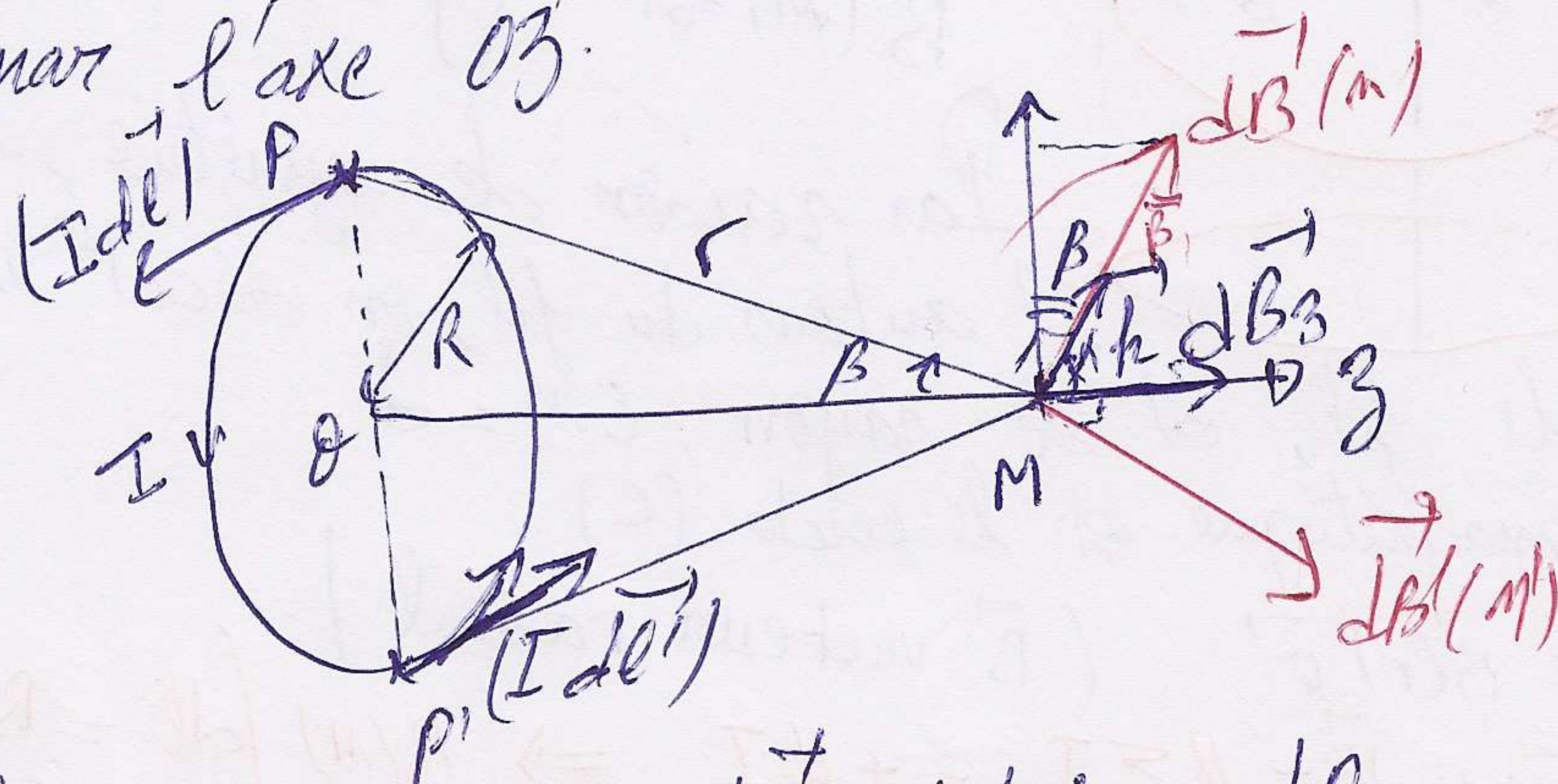
a) $\vec{B}(M) = f(\beta, z)$ crée par une spire.

M ∈ axe de la spire.

Le $\vec{v}$ d'induction magnétique crée par l'élément du courant ($I d\vec{l}$) en M :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin(\vec{dl}, \vec{u}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

l'éléments ($I d\vec{l}$) et ($I d\vec{l}'$) créent en M, $d\vec{B}(M)$ et $d\vec{B}'(M)$ dont la résultante sera portée par l'axe Oz .



D'où la projection de $d\vec{B}(M)$ sur $\vec{Oz}$: $dB_z = dB \sin \beta$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin \beta \vec{e}_z \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \beta}{r^2} \int_0^{2\pi R} dl \vec{e}_z$$

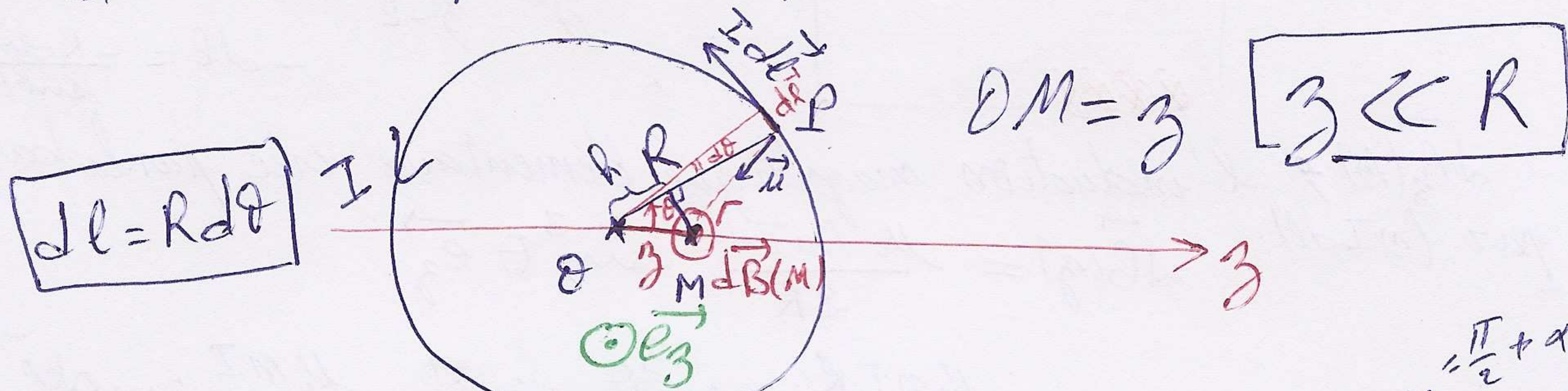
$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \beta \times 2\pi R \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I R}{2 r^2} \sin \beta \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I R}{2 R^2} \sin^3 \beta \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2 R} \sin^3 \beta \vec{e}_3 \quad (2)$$

$$b) \vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{2 R} \vec{e}_3$$

$$M=0 \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

c) $\vec{B}(M)$; $M \in \text{plan de la spire}$.



$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin(\vec{l}, \vec{u}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cos \alpha \vec{e}_3$$

$$z \ll R \Rightarrow \frac{z}{R} \rightarrow \varepsilon (\text{petite})$$

$$r^2 = R^2 + z^2 - 2zR \cos \theta \quad (\text{triangle quelconque})$$

$$= R^2 \left[1 + \frac{z^2}{R^2} - 2 \frac{z}{R} \cos \theta \right]$$

$$= R^2 [1 + \varepsilon]$$

$$\text{on a: } R - z \cos \theta = r \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{R - z \cos \theta}{r}$$

$$\Rightarrow d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta (R - z \cos \theta)}{R^3} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} - \frac{2z}{R} \cos \theta \right)^{-3/2}$$

$$\text{on sait que: } (1 + \varepsilon)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{15}{8} \varepsilon^2 + \dots$$

$$\text{en D.L : } d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left[1 + \frac{2z}{R} \cos \theta - \frac{3}{2} \frac{z^2}{R^2} + \frac{9}{2} \frac{z^2}{R^2} \cos^2 \theta + \dots \right] d\theta$$

$$\int_0^\pi \cos \theta d\theta = 0 ; \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

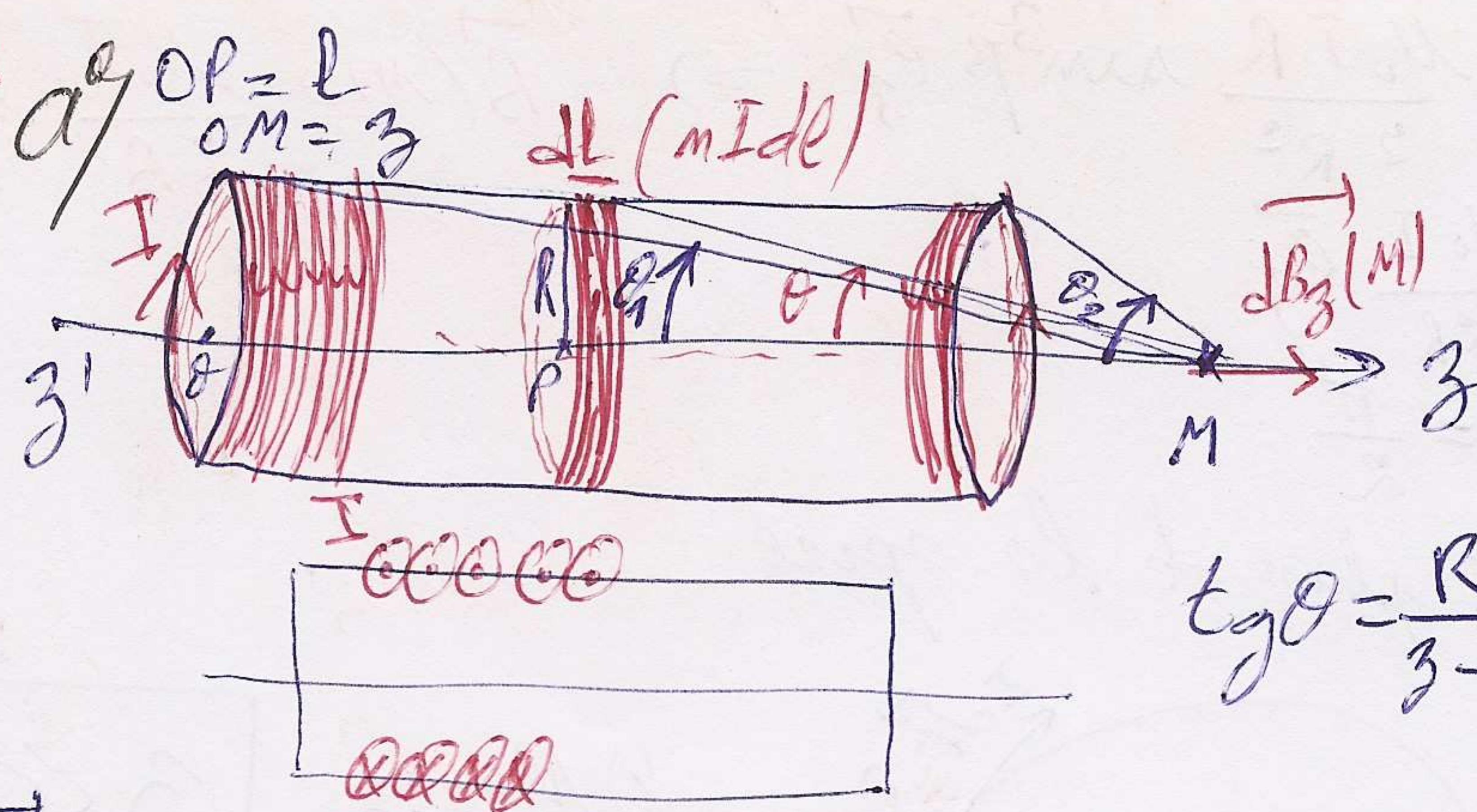
$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left[1 + \frac{3}{4} \frac{z^2}{R^2} + \dots \right] \vec{e}_3$$

$$= B_1 + B_2 + B_3 + \dots$$

$$B_1 \equiv B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Exercice n° 3



$$\tan \theta = \frac{R}{z-l} \Rightarrow z-l = R \cot \theta$$

$$-dl = -\frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$$

Soit $d\vec{B}_z(M)$ l'induction magnétique élémentaire créée par la bande dl transverse par $(nI dl)$.

$$d\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 (nI dl)}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0 n I R}{2R} \cdot \frac{\sin^3 \theta}{\sin^2 \theta} d\theta \vec{e}_z = \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \theta d\theta \vec{e}_z$$

$$n = \frac{N}{l} \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} \int \sin \theta d\theta$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} [\cos \theta_1 - \cos \theta_2] \vec{e}_z$$

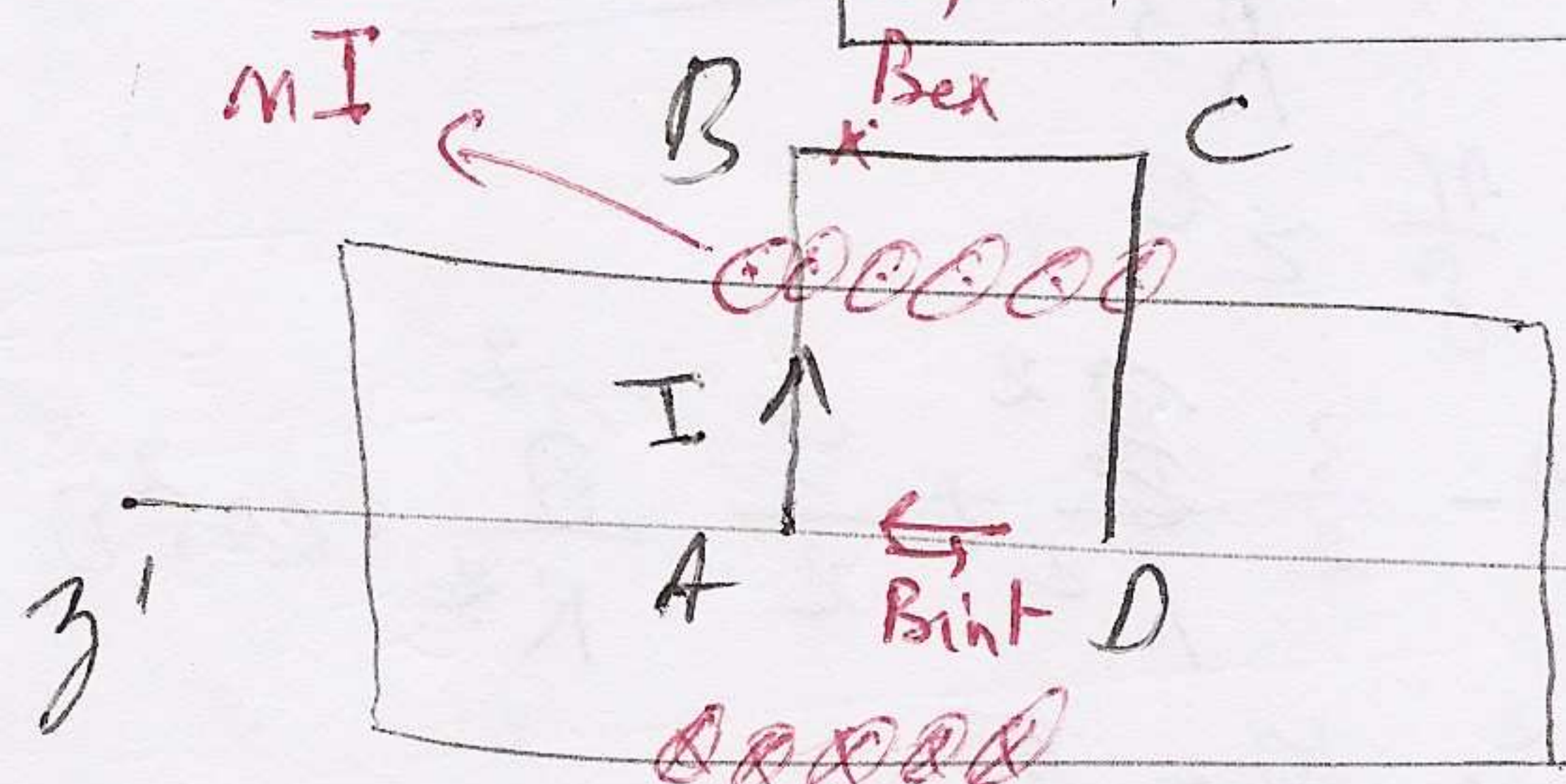
solénoïde fini

b) $\vec{B}(M)$ solénoïde indéfini $\theta_1 \rightarrow 0$ $\theta_2 \rightarrow \pi \Rightarrow \vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$

* $\vec{B}_{ex} = \vec{0}$?

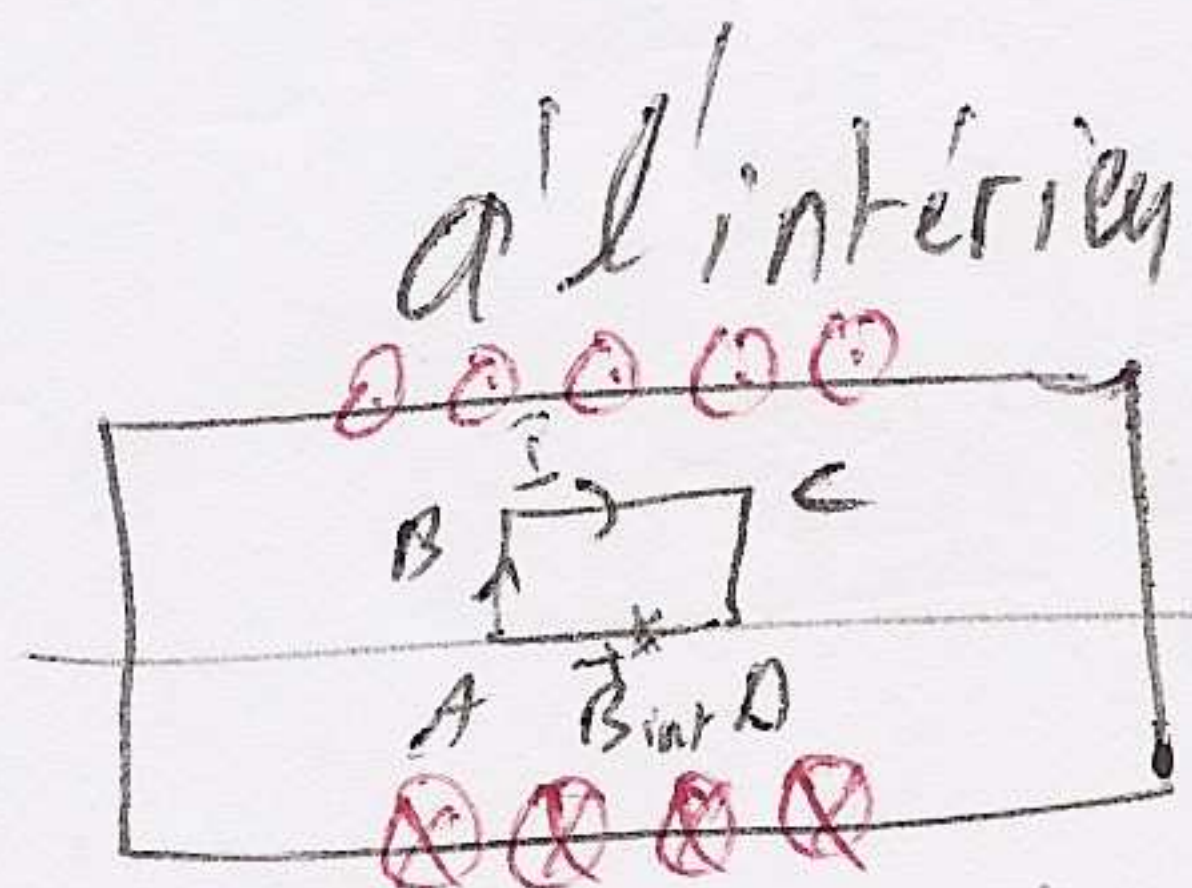
$\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ $\forall M$ (intérieur au solénoïde)

Th. d'Ampère : $\oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I$



$$\Rightarrow B_{ex} \cdot BC - B_{int} \cdot DA = -\mu_0 (nI dl) - \mu_0 n I DA$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{ex} = 0}$$



$$\Rightarrow B \cdot BC - B_{int} \cdot DA = 0$$

$$B_{int} \cdot BC - \mu_0 n I DA = 0$$

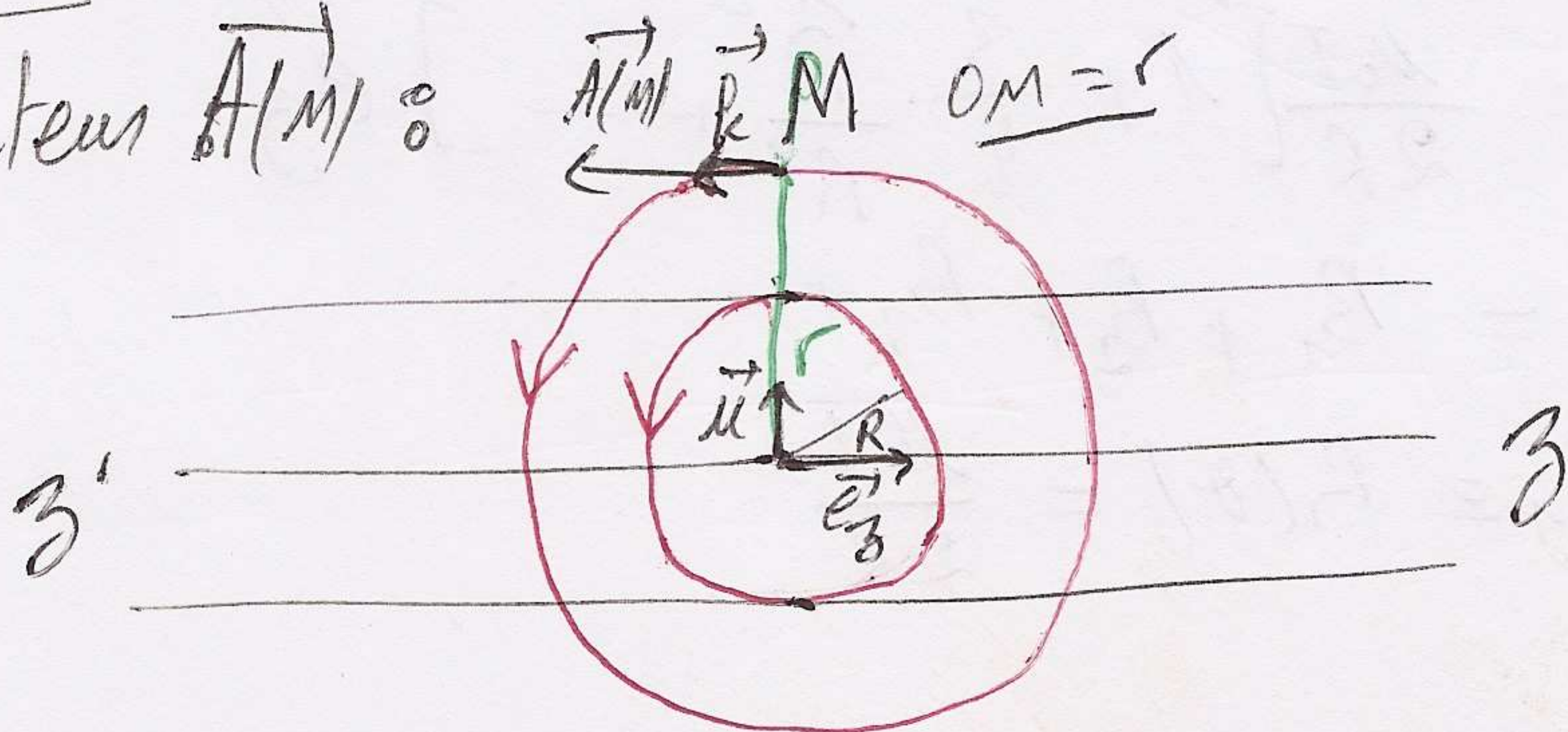
$$\boxed{\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{e}_z}$$

c) Potentiel vecteur $\vec{A}(M)$: $\vec{A}(M) \vec{k} M$ $OM = r$

$$d\vec{\ell} = dl \cdot \vec{k}$$

$$\vec{A}(M) = A(r) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell}}{r}$$

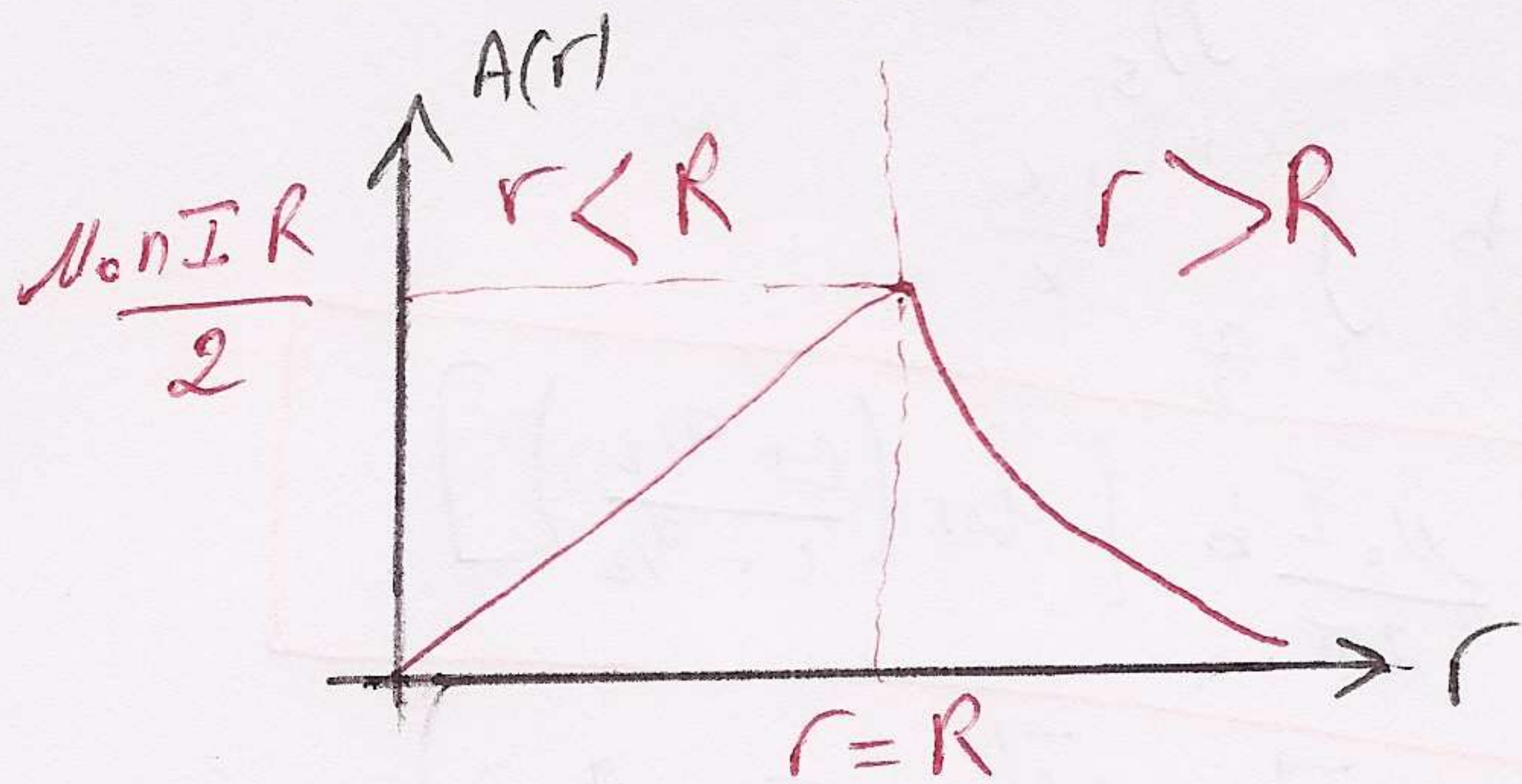


$$\int_C \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell} \stackrel{\text{STOKES}}{=} \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{B}(M) = \vec{\text{rot}} \vec{A}(M) \quad (3)$$

$$* \underline{r > R} : \Rightarrow A(r) \cdot 2\pi r = B(M) \cdot \pi R^2 = \mu_0 n I \pi R^2 \Rightarrow \boxed{\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2r} R^2 \vec{k}}$$

$$* \underline{r < R} : \Rightarrow A(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 n I \times \pi r^2 \Rightarrow \boxed{\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} r \vec{k}}$$



Exercice 4 :

$$1^o \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \vec{k} \quad (\text{fil infini})$$

$$2^o \vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DA} ?$$

(force exercée par le fil sur le cadre)

$$d\vec{F}_{AB} = I_2 d\vec{\ell}_2 \wedge \vec{B} = I_2 d\ell_2 \vec{j} \wedge B \vec{k}$$

$$= I_2 d\ell_2 B \vec{i} = I_2 d\ell_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(c + \frac{a}{2})} \vec{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{AB}(M) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(c + \frac{a}{2})} b \vec{i}} \quad (M: \text{milieu de } AB)$$

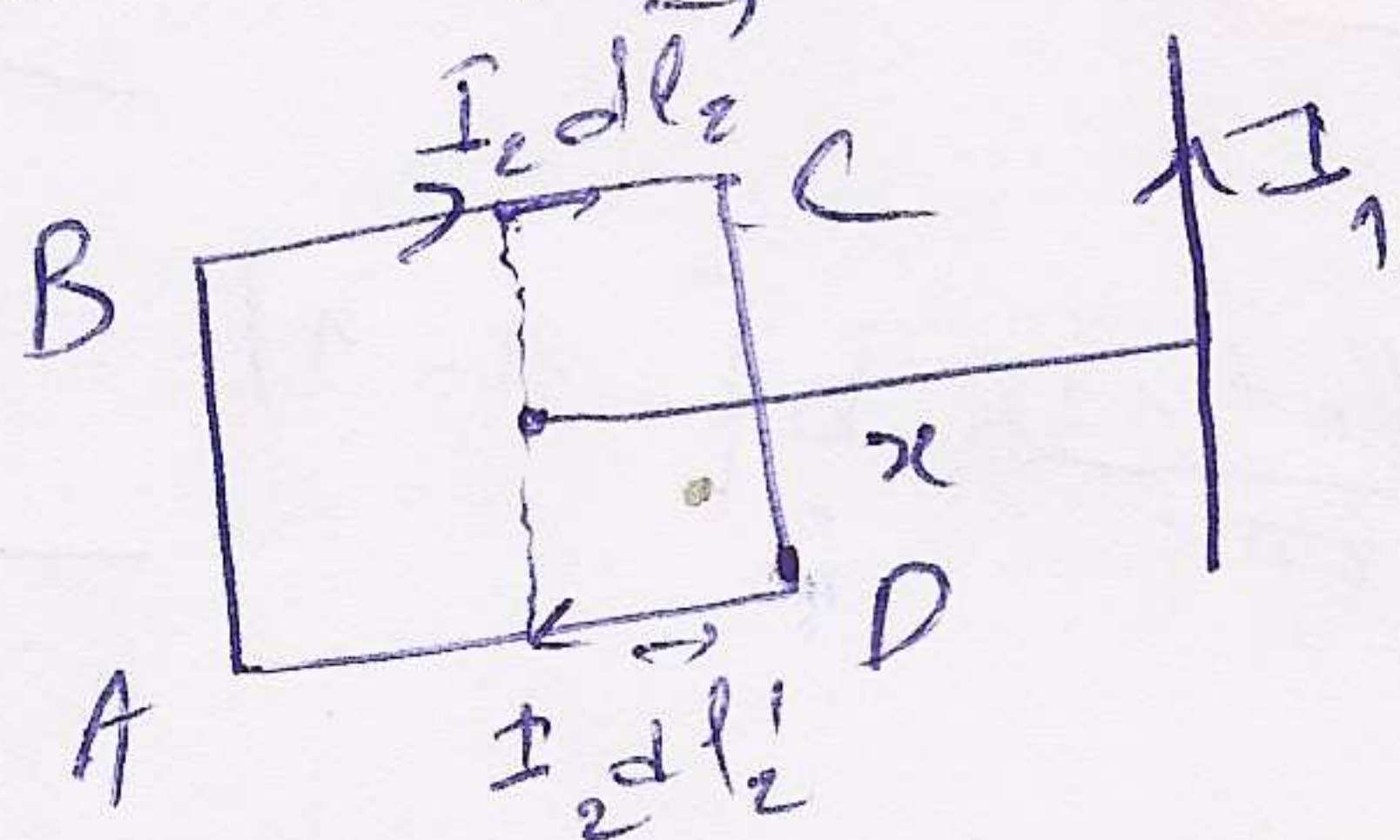
$$\boxed{\vec{F}_{CD} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(c - \frac{a}{2})} b \cdot (-\vec{i})}$$

$$d\vec{F}_{BC} = I_2 d\vec{\ell}_2 \wedge \vec{B}$$

$$= I_2 d\ell_2 \vec{i} \wedge B \vec{k} = I_2 d\ell_2 B (-\vec{j}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} d\ell_2 (-\vec{j})$$

$$d\vec{F}_{DA} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} d\ell_2' (\vec{j})$$

$$d\ell_2 = d\ell_2' = a$$



$$\boxed{\vec{F}_{BC} + \vec{F}_{DA} = \vec{0}}$$

ont le m module et
de sens opposé

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CD} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} b \left[\frac{1}{c + \frac{a}{2}} - \frac{1}{c - \frac{a}{2}} \right] \vec{i}}$$

39 Flux de $\vec{B}(M)$ à travers le cadre?

$$d\Phi_{\vec{B}/S_{\text{cadre}}} = \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = B(M) \cdot h \cdot dS \cdot \vec{n}$$

$$= B(M) \cdot dS$$

Le flux totale de $\vec{B}(M)$ à travers la surf. S du cadre.

$$\Phi_{\vec{B}/S} = \iint_{(S)} B \cdot dS = \iint_S \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot b \cdot dx$$

$$\Phi_{\vec{B}/S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \int_{c-\frac{a}{2}}^{c+\frac{a}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$\Phi_{\vec{B}/S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} b \left[\ln \left(\frac{c+\frac{a}{2}}{c-\frac{a}{2}} \right) \right]$$

49 Th. Maxwell: $dW = \vec{F}_{\text{em}} \cdot d\vec{\ell} = I_e d\Phi$

(Le travail dû aux forces é-m pendant un déplacement $d\vec{\ell}$ du circuit est égal au produit du courant qui traverse le circuit et la variation du flux à travers (c))

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = I_e d\Phi = I_e \text{grad} \Phi \cdot d\vec{\ell}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = I_e \text{grad} \Phi = I_e \frac{d\Phi}{dx} \vec{i} = I_e \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} b \ln \frac{c+\frac{a}{2}}{c-\frac{a}{2}} \right) \vec{i}$$

$$C \equiv x \Rightarrow \vec{F} = \frac{\mu_0 I I_e}{2\pi} b \left[\frac{1}{x+\frac{a}{2}} - \frac{1}{x-\frac{a}{2}} \right] \vec{i}$$

59 $\Phi_{\vec{B}/S} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

$$\begin{aligned} c \gg a &\Rightarrow c + \frac{a}{2} \approx c \\ c \gg b &\Rightarrow c - \frac{a}{2} \approx c \end{aligned}$$

$$\Phi_{\vec{B}/S} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi c} \iint_{(c)} dS$$

$$\Phi_{\vec{B}/S} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi c} ab$$

6) a- $\Phi = B \cdot S \cos \alpha = B \cdot a \cdot b \cos \alpha$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi c} a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

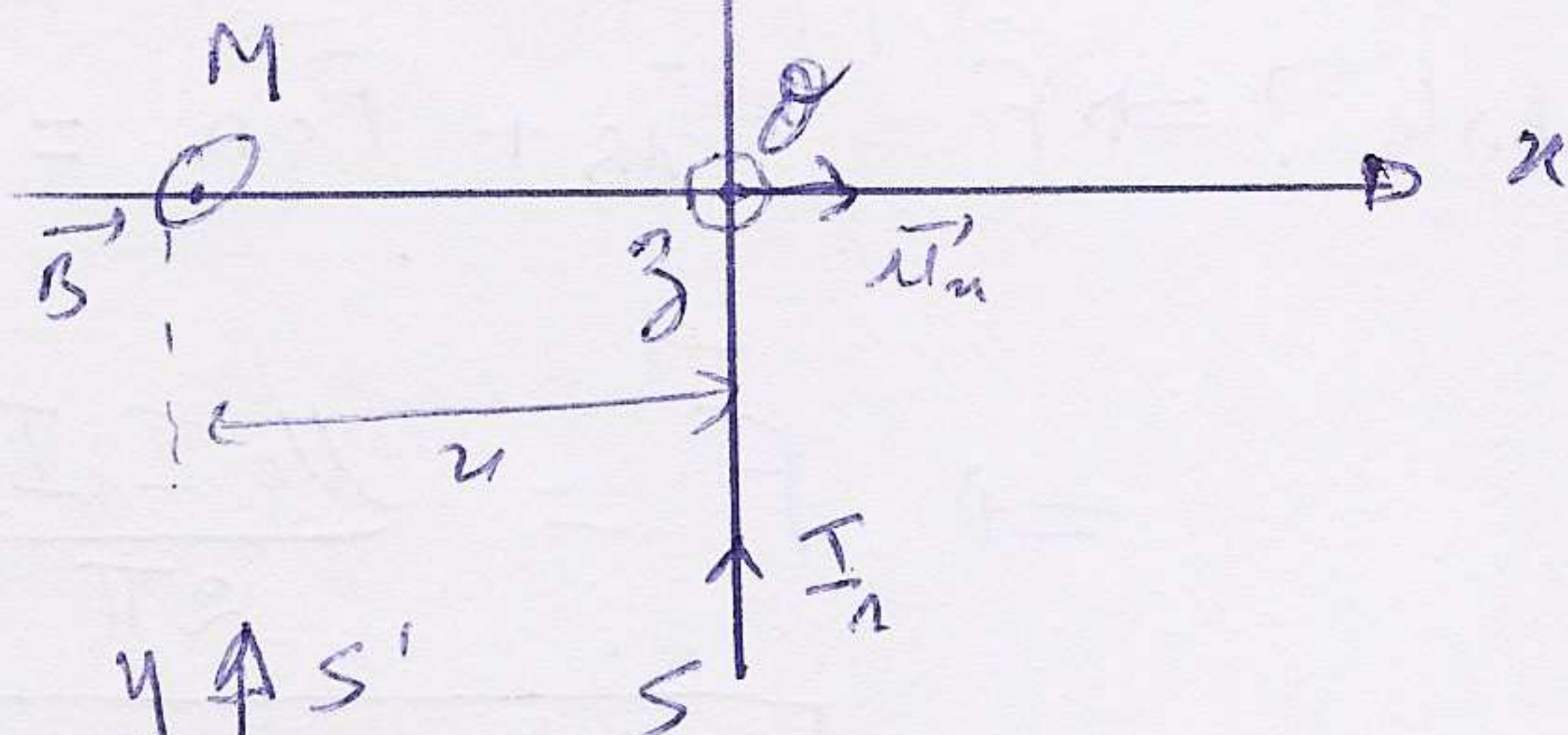
b- $dW = I_e \cdot d\Phi$

$$W = I_e [\Phi_{\alpha=\pi} - \Phi_{\alpha=0}] = \frac{\mu_0 I_1 I_e}{2\pi c} a \cdot b [-1 - 1]$$

$$= - \frac{\mu_0 I_1 I_e}{\pi c} a \cdot b$$

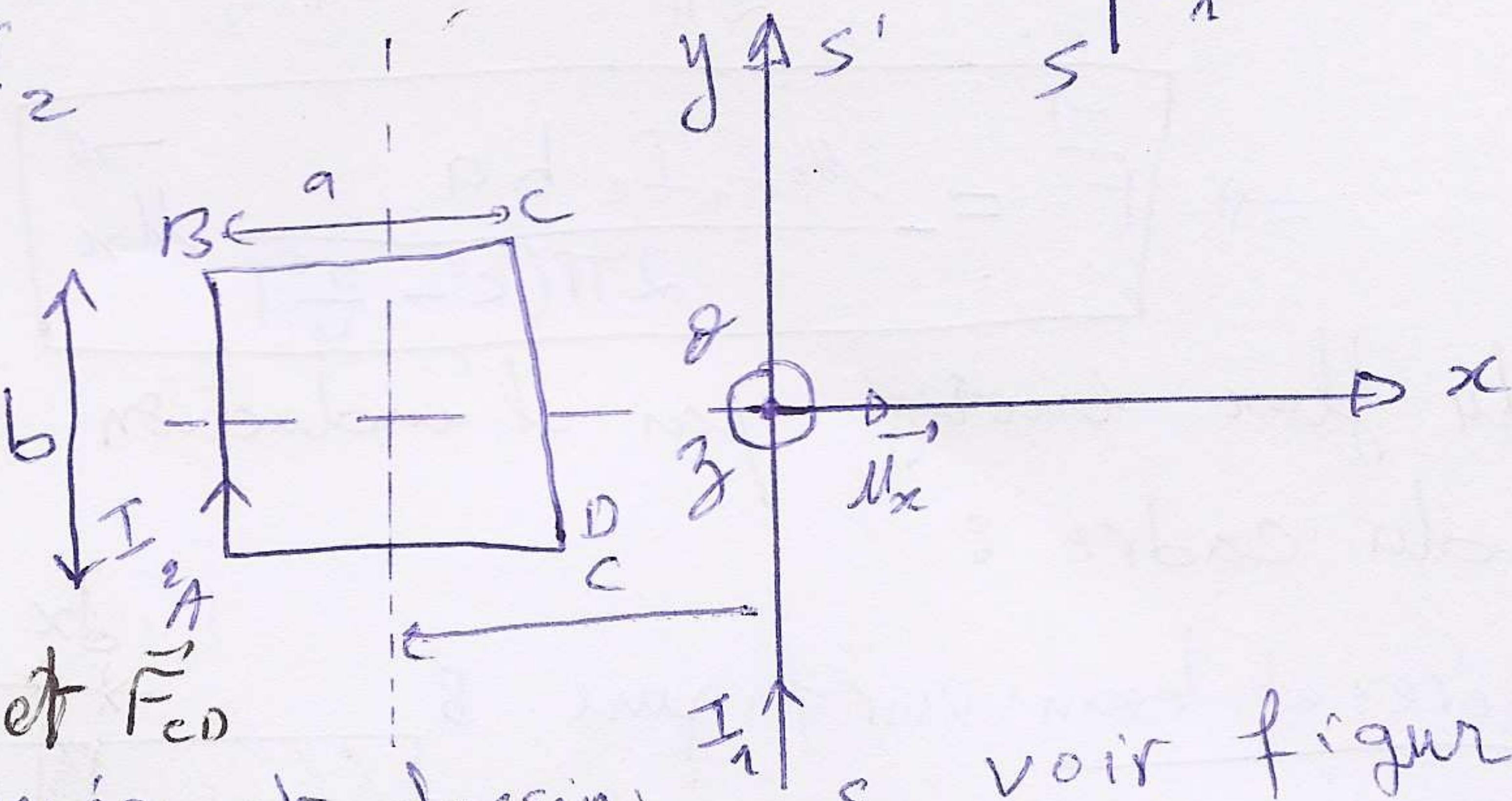
1^o $\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{u}$ (voir figure)

$\vec{u} \perp$ au plan formé par la tige et $\vec{OM}$
 $\vec{u} = \vec{u}_3$



2^o Cadre parcouru par I_2
 (voir figure)

$\vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DA}$



2-1. Détermination de $\vec{F}_{AB}$ et $\vec{F}_{CD}$

a- $\vec{F}_{AB}$? choix du repère et dessin: voir figure

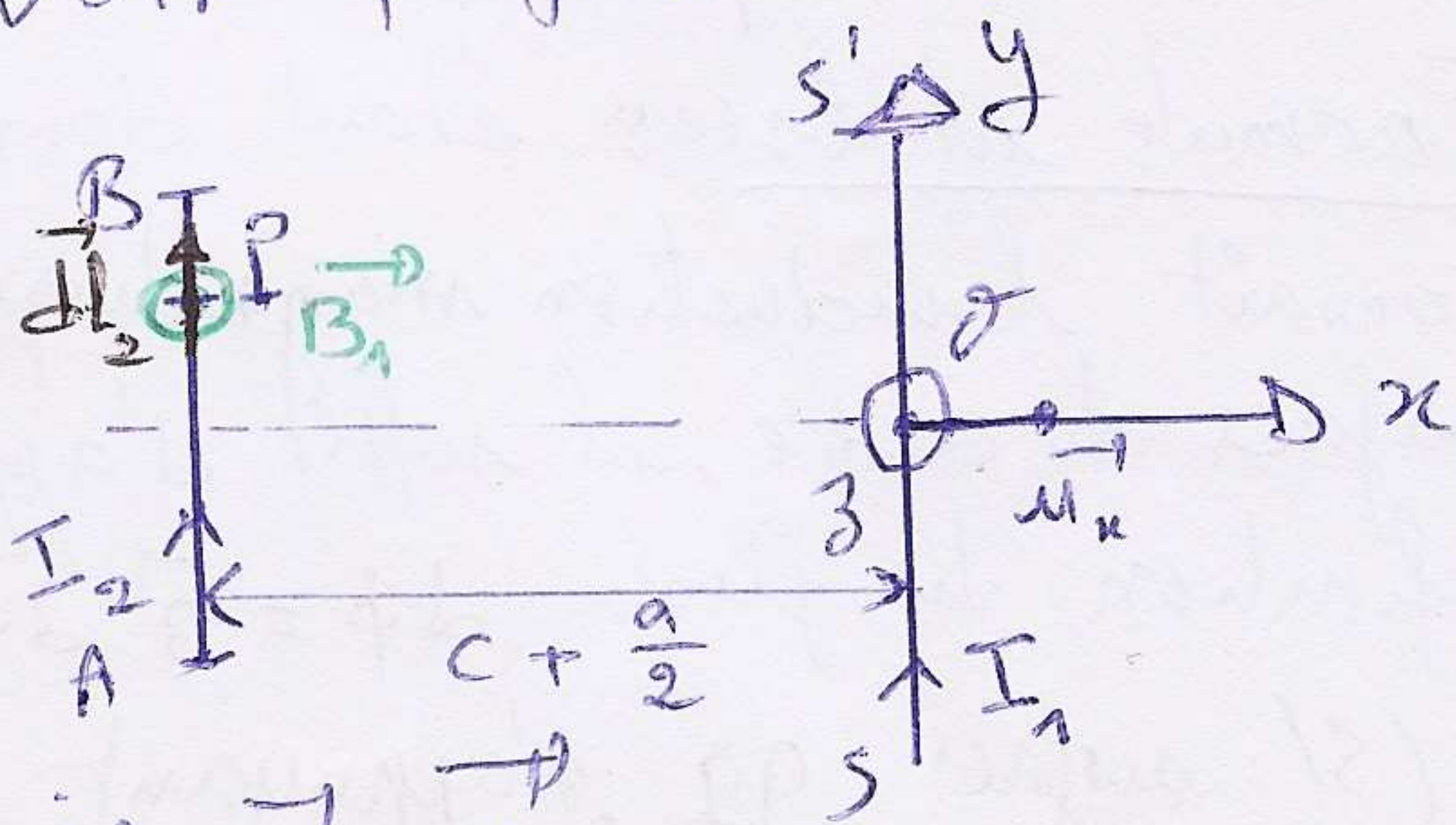
- Formule utilisée: "formule de Laplace"

$d\vec{F}_{AB} = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1$

$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(c + \frac{a}{2})} \vec{u}_3$

$\Rightarrow d\vec{F}_{AB} = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(c + \frac{a}{2})} \vec{u}_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(c + \frac{a}{2})} d\vec{l}_2 \wedge \vec{u}_3$

$d\vec{F}_{AB} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(c + \frac{a}{2})} d\vec{l}_2 \wedge \vec{u}_3$



* Intégration:

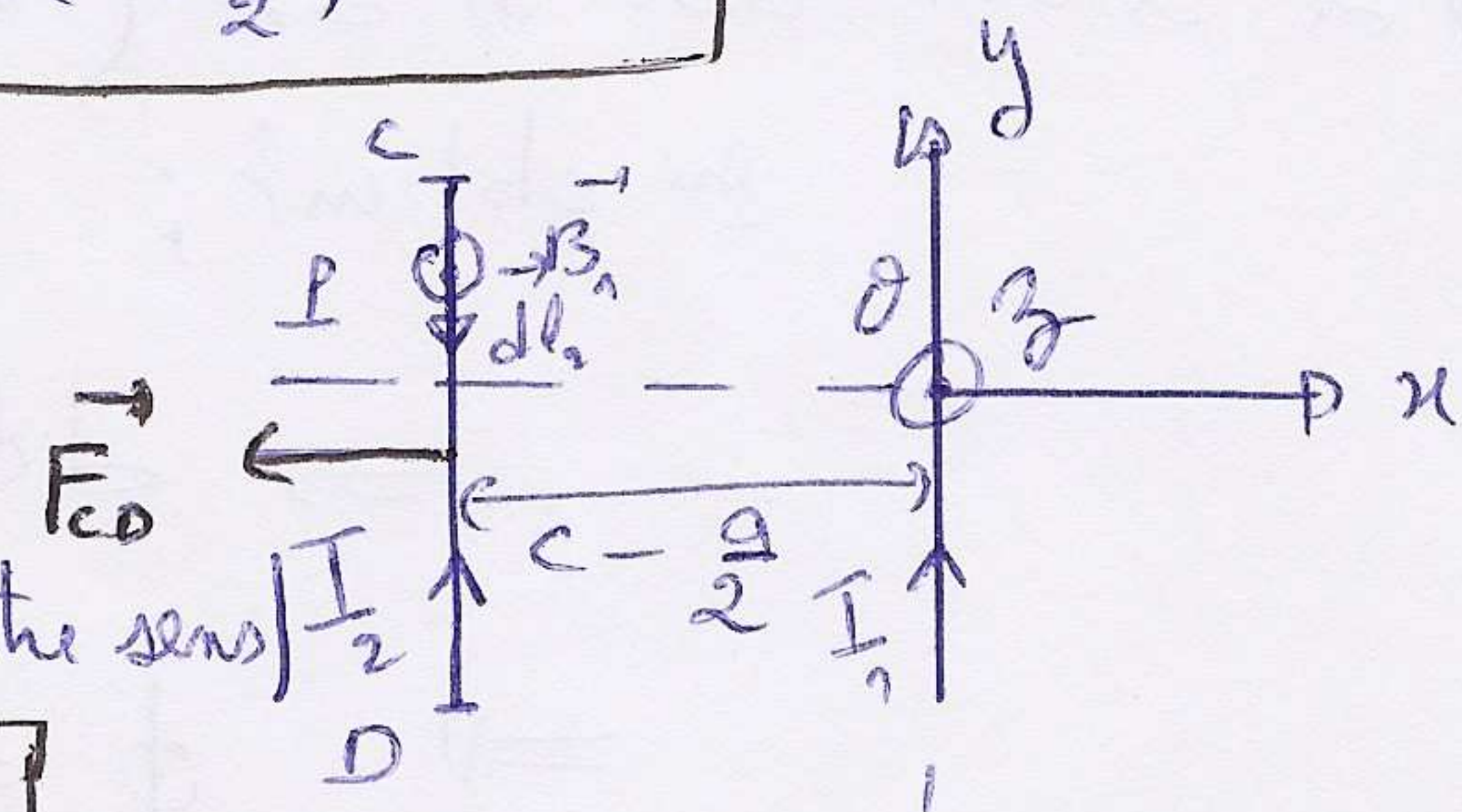
$\vec{F}_{AB} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(c + \frac{a}{2})} \vec{u}_3 \int_{[AB]} d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(c + \frac{a}{2})} b \vec{u}_3$

b- $\vec{F}_{CD}$? On rapport au cas précédent on a

la différence suivante: $c + \frac{a}{2} \rightarrow c - \frac{a}{2}$

et $\vec{u}_3 \rightarrow -\vec{u}_3$ (I_2 dans l'autre sens)

$\Rightarrow \vec{F}_{CD} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \cdot \frac{b}{c - \frac{a}{2}} (-\vec{u}_3)$



c- $\vec{F}_{BC} + \vec{F}_{DA}$?

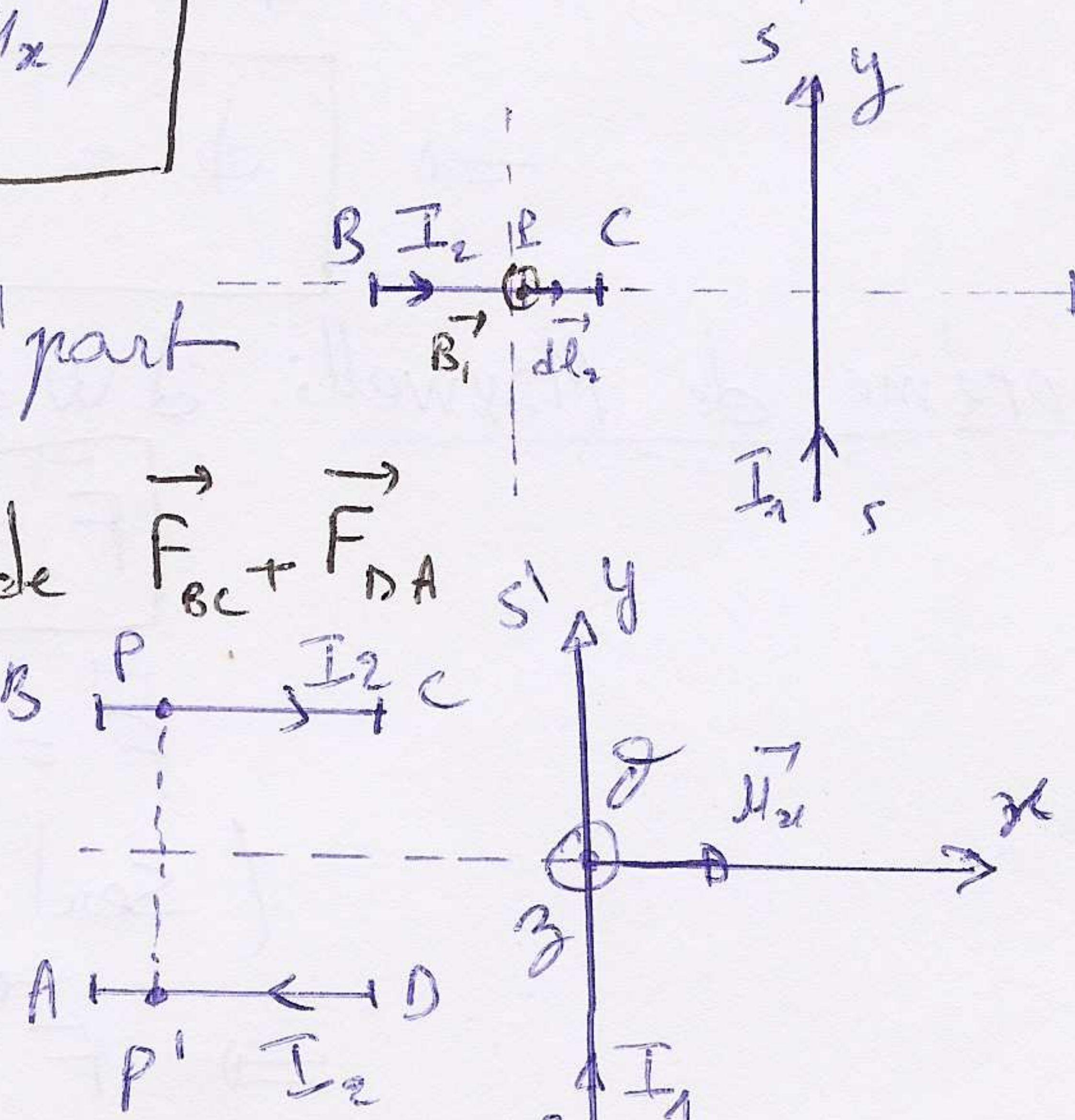
1^{er} méthode: Calculer $\vec{F}_{BC}$ et $\vec{F}_{DA}$ chacun à part

(à faire à la maison)

2^{ème} méthode: Détermination directe de $\vec{F}_{BC} + \vec{F}_{DA}$

Rmq: La tige étant illimitée et les 2 segments [BC] et [DA] parfaitement symétriques par rapport à l'axe /x

$\Rightarrow$ Les modules des 2 forces subies



sont égaux : $|\vec{F}_{BC}| = |\vec{F}_{DA}|$. Mais, étant le courant change de sens

$\Rightarrow \vec{F}_{BC}$ et $\vec{F}_{DA}$ sont opposées $\Rightarrow \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{DA} = \vec{0}$

d- $\vec{F}$ totale ? $\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CD} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(c + \frac{a}{2})} \vec{u}_x + \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(c - \frac{a}{2})} (-\vec{u}_x)$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi} \left(\frac{1}{c + \frac{a}{2}} - \frac{1}{c - \frac{a}{2}} \right) \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 b a}{2\pi(c^2 - \frac{a^2}{4})} \vec{u}_x}$$

3) Calcul du flux envoyé par l'induction $\vec{B}_1$ (créé par la tige) à travers la surface du cadre :

Choix du repère et dessin : voir figure B

Formule utilisées : étant donné que l'on connaît l'induction magnétique $\vec{B}_1$ et la surface du cadre, il suffit d'appliquer la définition du flux : $d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$

(S) : surface qq s'appuyant sur le contour du cadre. Donc on choisit la surface du bas.

$\vec{B}_1$ en revenant à la 1^{re} question.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{u}_y$$

$\Rightarrow$ Element dS choisit, pour appliquer $d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$, il faut que $\forall P \in dS$: $\vec{B}$ soit. Or $\vec{B}$ ne dépend que de x d'où le choix de l'elt $dS = b \cdot dx$ (voir figure) avec : $d\vec{S} = dS(-\vec{u}_z)$

on obtient : $d\phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \vec{u}_y \cdot b dx (-\vec{u}_z)$

$$\Rightarrow d\phi = -\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \frac{dx}{x} \Rightarrow \phi = -\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \int_{c+\frac{a}{2}}^{c-\frac{a}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \phi = -\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \left[\ln|x| \right]_{c+\frac{a}{2}}^{c-\frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \left| \frac{c + \frac{a}{2}}{c - \frac{a}{2}} \right|}$$

4) Théorème de Maxwell : $dW = I_2 d\phi$

$$\boxed{\vec{F} = \text{grad } W}$$

or les coord utilisées sont les coord. Cart.

$$\vec{F} = \frac{\partial W}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial W}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial W}{\partial z} \vec{u}_z$$

(seul x varie)

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\partial W}{\partial x} \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = I_2 \frac{d\phi}{dx} \vec{u}_x} \text{ avec : } \phi = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \left| \frac{c + a/2}{c - a/2} \right| \quad \text{EI (2) Boujamaq}$$

De manière générale

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

pour utiliser cette formule dans le ϕ il faut que initialement le cadre n'ait aucune influence donc en théorie il se trouve à l'infini et on doit l'amener de l'infini jusqu'à la distance c suivant x .

Donc la variable x c'est $\varepsilon \Rightarrow \vec{F} = I_2 \frac{d\phi}{d\varepsilon} \vec{u}_x$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{d\varepsilon} = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \left(\frac{1}{c + a/2} - \frac{1}{c - a/2} \right) \vec{u}_x = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \frac{(-a)}{c^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \cdot \frac{ba}{c^2 - \frac{a^2}{4}} \vec{u}_x}$$

2^{ème} Partie

1^{ère} On suppose $a \ll c$ et $b \ll c$

1^{ère} méthode: on refait le calcul avec: $d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$

2^{ème} méthode: on effectue un D.L pour $a \ll c \Rightarrow \frac{a}{c} = \varepsilon \rightarrow 0$

$$\phi = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \left| \frac{c + a/2}{c - a/2} \right| = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \left| \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{a}{c}}{1 - \frac{1}{2} \frac{a}{c}} \right|$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2}}{1 - \frac{\varepsilon}{2}}$$

D.L. de première ordre:

$$f(\varepsilon) = \ln \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2}}{1 - \frac{\varepsilon}{2}}, \quad f(0) = 0$$

$$f'(\varepsilon) = \left(\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{2}} \right) \times \frac{1}{2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow f(\varepsilon) = f(0) + \frac{\varepsilon}{1!} f'(0) = \varepsilon = \frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \cdot \frac{a}{c}}$$

6.1 on fait tourner le cadre d'un angle α autour de son axe vertical.

6-1) calculer le flux envoyé à travers la surface du cadre à la position α ?

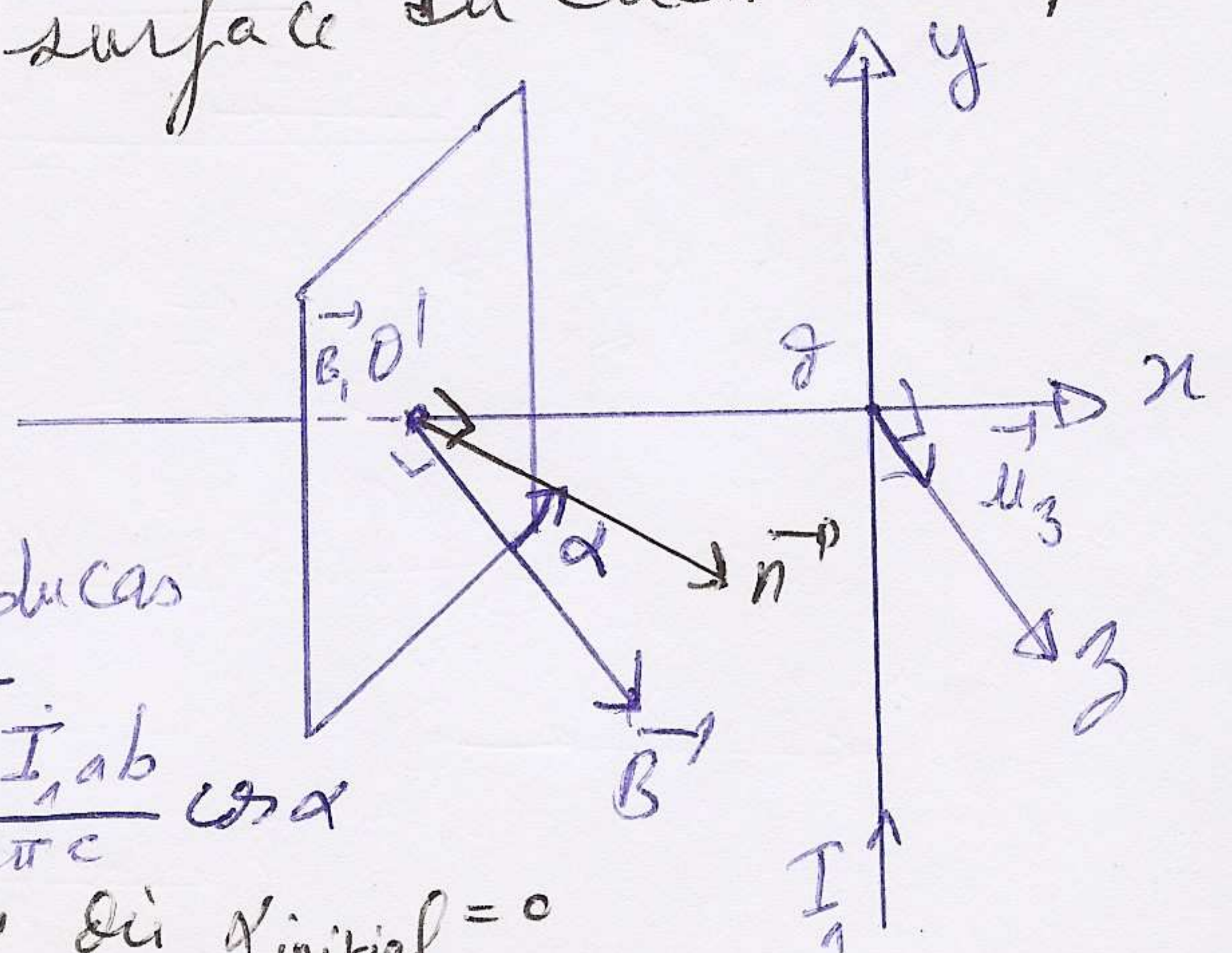
$$d\phi = \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = B_1 \cdot dS \cos \alpha ; B_1 \text{ fixe}$$

$$\Rightarrow \phi = \iint B_1 \cdot dS \cdot \cos \alpha ; \alpha \text{ fixe}$$

$$\Rightarrow \phi = B_1 \cdot S \cdot \cos \alpha ; B_1 \cdot S \text{ c'est le flux du cas précédent}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I_1 ab}{2\pi c} \cos \alpha$$

6-2) Calculer le travail mis en jeu dans le cas où $\alpha_{\text{initial}} = 0$ et $\alpha_{\text{final}} = \pi$



$$\phi = \frac{\mu_0 I_1 a b}{2\pi c} \cos \alpha \quad ; \text{ comme } d\phi \text{ est une d.T. exacte.}$$

$$\Rightarrow W = \frac{I_2}{2} [\phi(\pi) - \phi(0)] \quad (\text{car: l'intégrale ne dépend que de l'E.I et de l'E.F.})$$

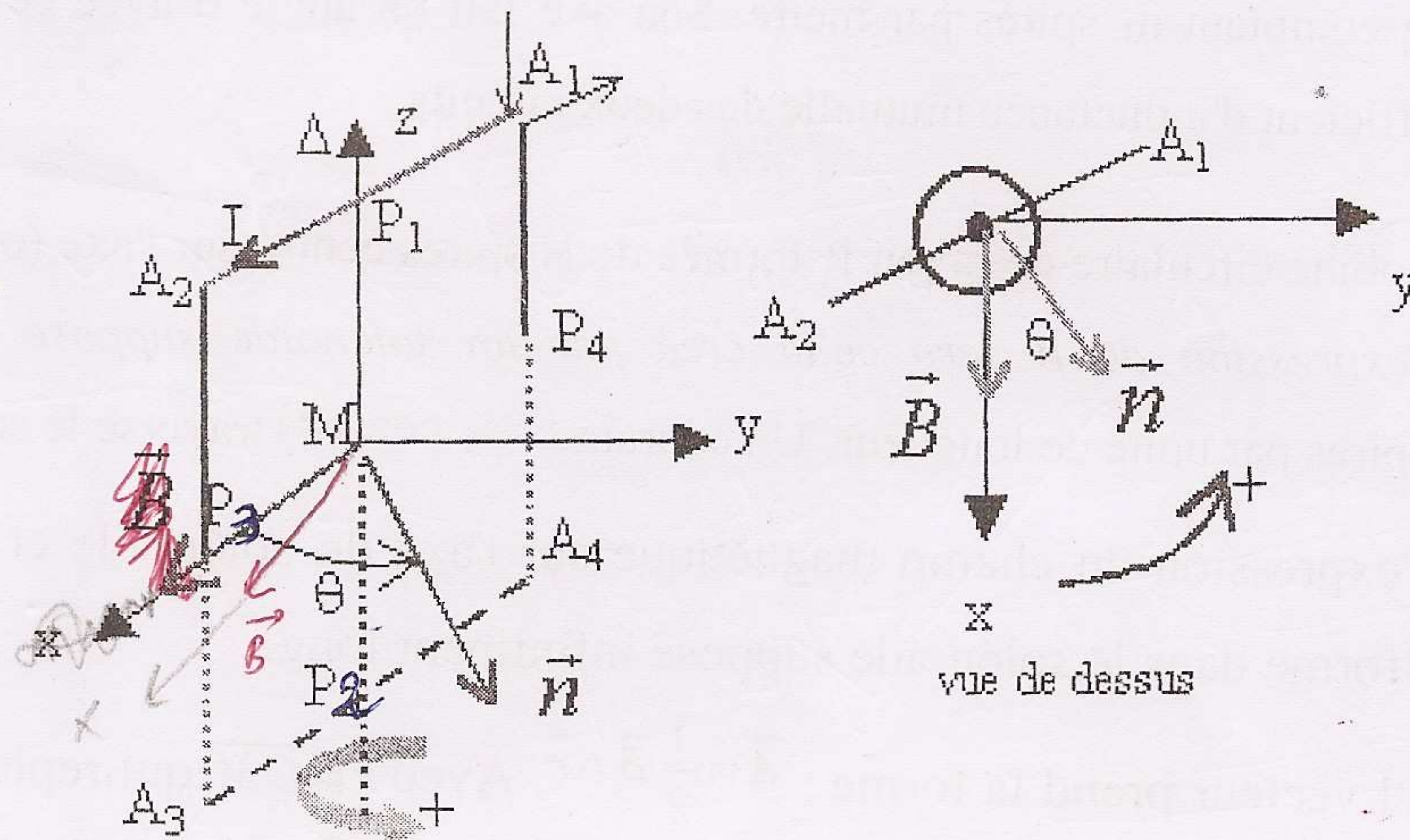
$$\Rightarrow W = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a b}{2\pi c} [\cos \pi - \cos 0]$$

$$\Rightarrow \boxed{W = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 a b}{\pi c}}$$

TD2 de E2 Magnéotostatique

Exercice 1 : Spire plane dans un champ magnétique uniforme :

Une spire rigide de côté a , d'aire S est parcourue par un courant d'intensité I imposée par le générateur. On définit son moment magnétique : $\vec{M} = IS\vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normale au plan de la spire. La spire de centre M , mobile sans frottement autour d'un axe $\Delta = Mz$ est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, ayant la direction et le sens de l'axe Mx . Sa position est repérée par l'angle θ .



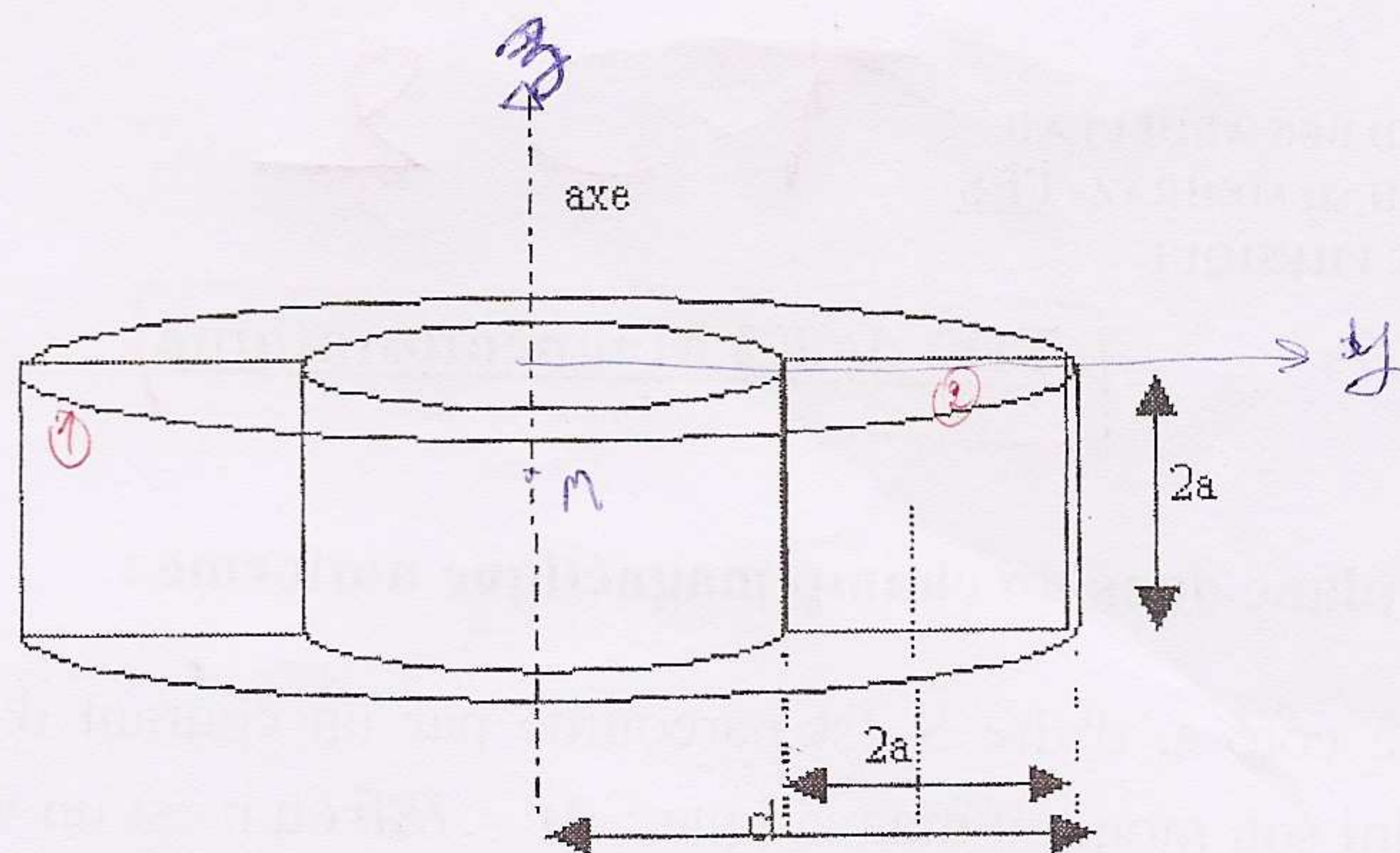
1. On note F_1 et F_2 les forces subies respectivement par les côtés perpendiculaires à Mz de milieu P_1 et P_2 , F_3 et F_4 les forces subies respectivement par les côtés parallèles à Mz de milieux P_3 et P_4 . Déterminer la somme des forces exercées sur la spire.
2. Montrer que ces forces constituent un couple dont on exprimera le moment par rapport à Δ , en fonction de M (moment magnétique), B et θ .
3. Montrer que l'énergie potentielle de cette spire dans la position repérée par θ peut s'écrire : $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$, en déduire le flux $\varphi_c = \Delta\varphi$ (Théorème de Maxwell).
4. Quelle est la position d'équilibre stable de la spire dans le champ? Justifier.

Exercice 2 : bobinage torique

On considère un bobinage de N spires régulièrement réparties sur un tore à section carrée, sans noyau de fer.

1- Par application du théorème d'Ampère, en déduire l'expression du champ magnétique $B(r)$ à l'intérieur du solénoïde à la distance r de l'axe du tore en fonction de l'intensité du courant I , du nombre de spires N et de la distance r à l'axe. En utilisant le même type de raisonnement, montrer que le champ magnétique est nul à l'extérieur du tore.

2- En déduire l'expression théorique de l'inductance propre L de ce bobinage torique. Dans le cas particulier où a est petit devant d , vérifier que l'on obtient pour L la même formule que celle obtenue dans le cas du solénoïde en posant $l=2\pi d$.



Exercice 3 : inductance mutuelle de 2 solénoïdes

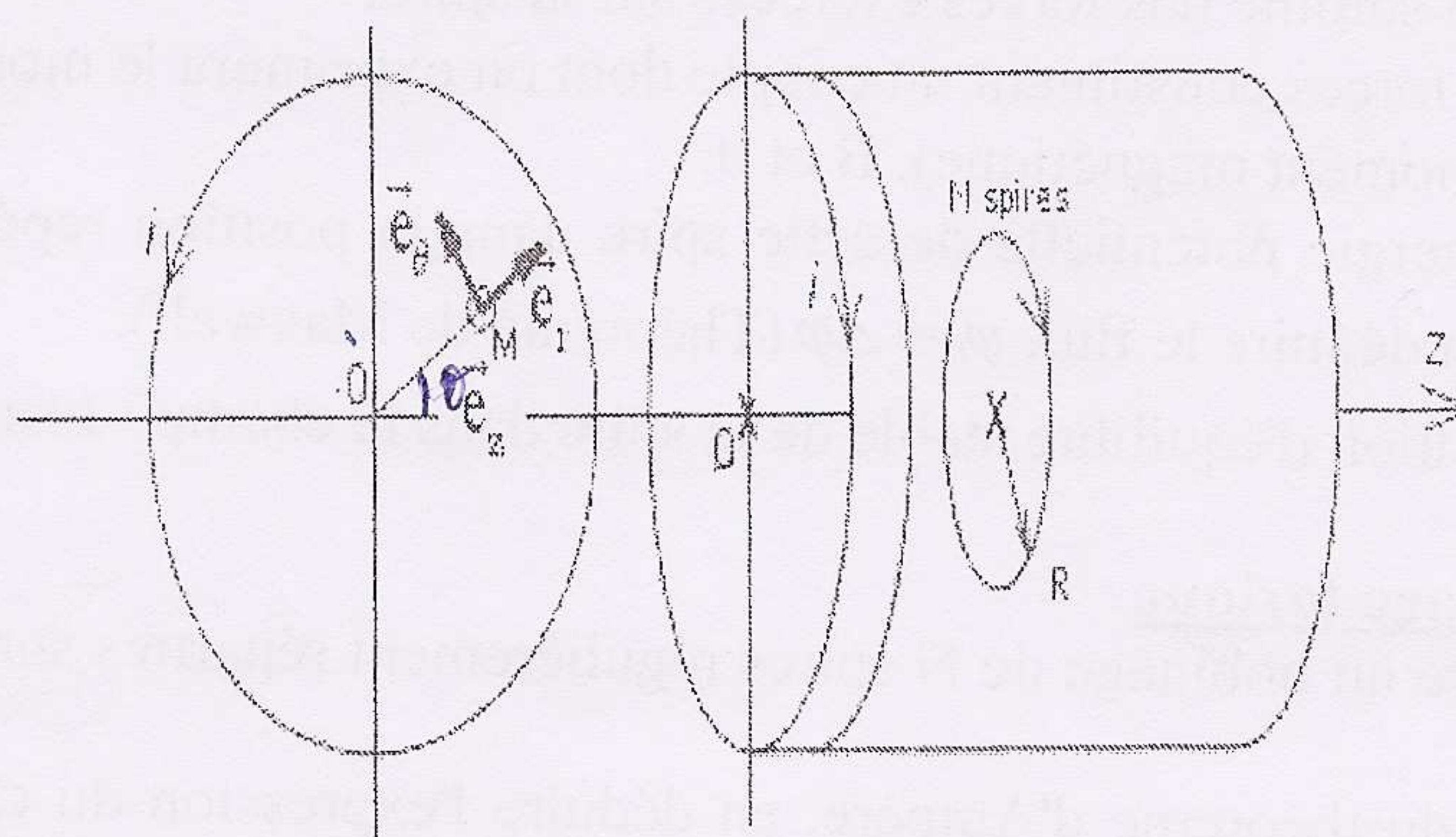
Une bobine comptant N_2 spires de section S_2 est centrée sur l'axe d'un solénoïde infiniment long comptant n_1 spires par mètre. Son axe fait un angle θ avec celui du solénoïde. Calculer le coefficient d'inductance mutuelle des deux circuits.

Exercice 4 :

On place une bobine circulaire de rayon R formée de N spires centrée sur l'axe (oz) d'un solénoïde *très long* (l'expression de B sera celui créé par un solénoïde supposé infiniment long) comportant n spires par unité de longueur. Un courant $i = i_0 \cos(\omega t)$ traverse le solénoïde.

1- Rappeler l'expression du champ magnétique sur l'axe du solénoïde et montrer que ce champ est uniforme dans le solénoïde supposé infiniment long.

2- Le potentiel vecteur prend la forme : $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}$. Avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ qui repère la position du point M intérieur au solénoïde. Exprimer le potentiel vecteur et le champ électromoteur en un point de la spire circulaire.



3- En déduire l'expression de la force électromotrice induite le long de la spire, que l'on prendra orientée dans le même sens que le solénoïde.

4- Retrouver ce résultat par dérivation directe du flux du champ magnétique dans la bobine.

T.D 2

Pr. Chaoui
14 h15

Ex ①

Exercice 1 :

$$1^o \vec{F}_1 = \vec{F}_{A_1 A_2} = I \vec{A_1 A_2} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{A_3 A_4} = I \vec{A_3 A_4} \wedge \vec{B}$$

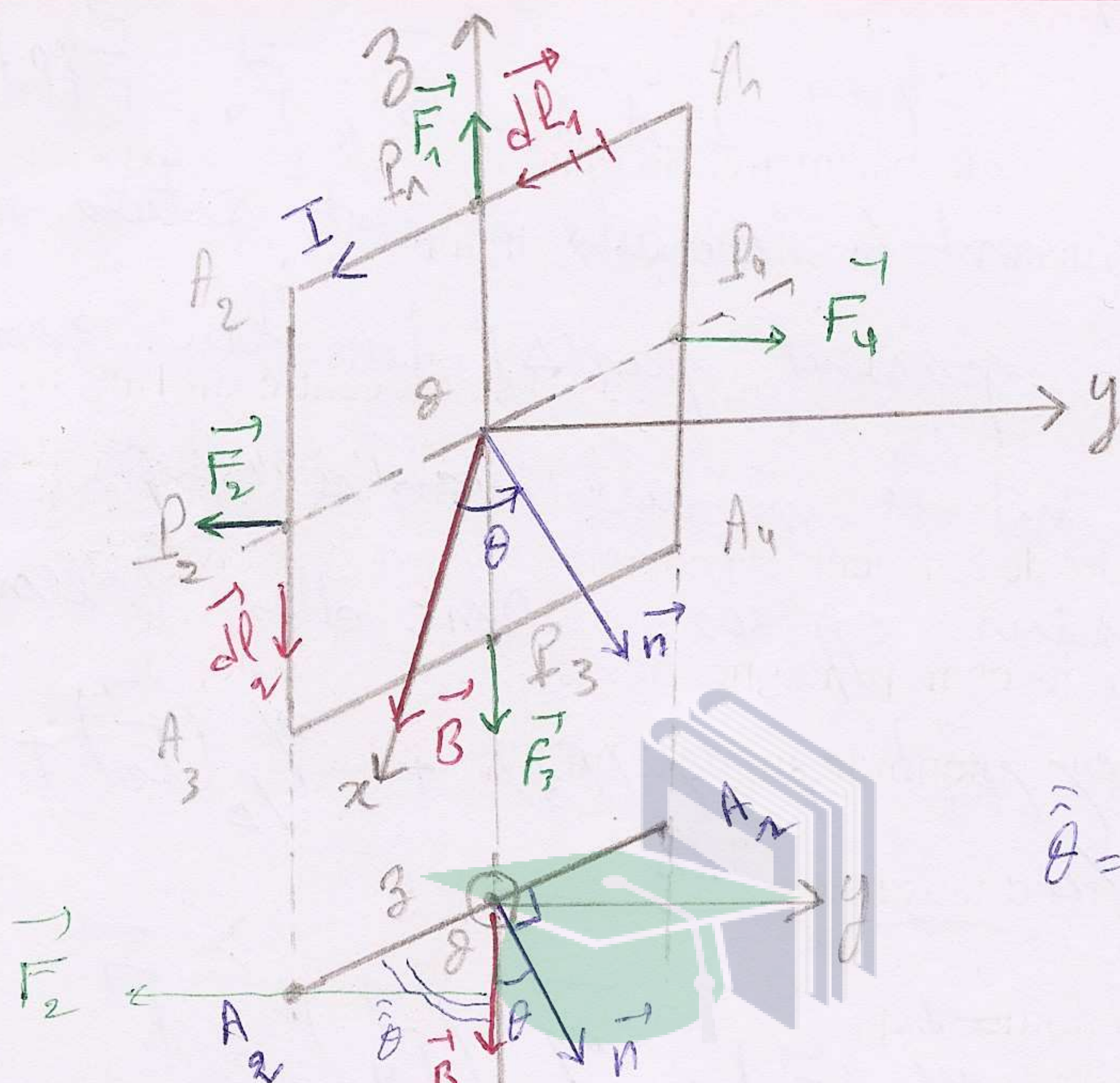
$\Rightarrow F_1$ et F_2 ont m module et de sens opposé $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$

La m chose pour $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_{A_2 A_3} + \vec{F}_{A_1 A_4} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$ (somme des forces exercées sur la spire).

Exercice 1 :

Pr. Boujamaa



$$\hat{\theta} = \frac{\pi}{2} - \theta = (\vec{A_1 A_2}, \vec{B}) = \frac{\pi}{2} - \theta$$

1° Déterminer les forces appliquées à la spire.

Partageons la spire en 4 côtés (brins)

* Force Appliquée sur le brin $A_1 A_2$:

La formule utilisé : force de Laplace

$$d\vec{F}(P_1) = d\vec{F}_1 = I d\vec{l}_1 \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_1 = \int_{[A_1 A_2]} I d\vec{l}_1 \wedge \vec{B} = -I \int_{[A_1 A_2]} \vec{B} \wedge d\vec{l}_1$$

$$= -I \vec{B} \wedge \int_{[A_1 A_2]} d\vec{l}_1 \quad (\vec{B} \text{ uniforme})$$

$$= -I \vec{B} \wedge \vec{A_1 A_2} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_1 = I \vec{A_1 A_2} \wedge \vec{B}}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = I a B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \vec{u}_3$$

* Force appliquée sur le brin $A_2 A_3$:

$$d\vec{F}(P_2) = d\vec{F}_2 = I d\vec{l}_2 \wedge \vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_2 = I \vec{A_2 A_3} \wedge \vec{B}}$$

$$(\vec{A_2 A_3}, \vec{B}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{F}_2 = I A_2 A_3 B \sin(\vec{A_2 A_3} \wedge \vec{B})$$

$$\boxed{\vec{F}_2 = -I a \cdot B \vec{u}_y}$$

* Force appliqué sur $A_3 A_4$:

$$\vec{F}_3 = I \vec{A_3 A_4} \wedge \vec{B} \quad (\vec{A_3 A_4}, \vec{B}) = \theta - \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{F}_3 = I a \cdot B \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) (-\vec{u}_3)$$

* Force appliqué à $A_4 A_1$:

$$\vec{F}(P_4) = \vec{F}_4 = I \vec{A_4 A_1} \wedge \vec{B}$$

$$(\vec{A_4 A_1}, \vec{B}) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_4 = I a \cdot B \cdot \vec{u}_y}$$

Recapitulatif:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}(P_1) = I \vec{A_1 A_2} \wedge \vec{B}; \quad \vec{F}_2 = \vec{F}(P_2) = I \vec{A_2 A_3} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}(P_3) = I \vec{A_3 A_4} \wedge \vec{B}; \quad \vec{F}_4 = \vec{F}(P_4) = I \vec{A_4 A_1} \wedge \vec{B}$$

27 Pour $\vec{F}_1, \vec{F}_3$: elles ont m module et sont situées sur le m axe.

Ces forces passent par (Δ) donc leur somme est nul et de sens opposé.

Pour $\vec{F}_2, \vec{F}_4$: elles ont m module mais n'et pas de m axe, ne passent

pas par (Δ) , et de sens opposés. donc elles créent un couple.

$$\vec{M}_{tot/\Delta} = \underbrace{\vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}_1) + \vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}_3)}_0 + \vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}_2) + \vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}_4)$$

$$\vec{M}_{tot/\Delta} = \underbrace{\vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}_2)}_{\vec{T}_1} + \underbrace{\vec{M}_{/\Delta}(\vec{F}_4)}_{\vec{T}_2} = \vec{T}$$

$$\vec{T}_1 = \vec{OP_2} \wedge \vec{F}_2, \quad \vec{T}_2 = \vec{OP_4} \wedge \vec{F}_4$$

$$\vec{T}_1 = \vec{OP_2} \wedge \vec{F}_2 = OP_2 \cdot F_2 \sin(\vec{OP_2}, \vec{F}_2) \cdot (-\vec{u}_3)$$

$$\vec{T}_2 = \vec{OP_4} \wedge \vec{F}_4 = OP_4 \cdot F_4 \sin(\vec{OP_4}, \vec{F}_4) \cdot (-\vec{u}_3)$$

$$\vec{T}_1 = -\frac{a}{2} \cdot F_2 |\sin \theta| \vec{u}_3 = -\frac{a}{2} \cdot I a B \sin \theta \vec{u}_3$$

$$|\vec{F}_2| = F_2 = I a B$$

$$\vec{T}_2 = -\frac{a}{2} \cdot F_4 \cdot |\sin(-\theta)| \vec{u}_3 = -\frac{a}{2} I a B \sin \theta \vec{u}_3$$

$$|\vec{F}_4| = F_4 = I a B$$

$$\Rightarrow \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \boxed{-a^2 I B \sin \theta \vec{u}_3}$$

$$\text{or: } a^2 = S \Rightarrow \vec{T} = -I \cdot S \cdot B \sin \theta \vec{u}_3$$

et $I \cdot S = |\vec{M}|$ moment magnétique de la spire

$$\Rightarrow \vec{M} = -|\vec{M}| B \sin \theta \vec{u}_3$$

3°) Considérons un pt. M en rotation pure:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{M} = \vec{F} \cdot \frac{\delta \vec{M}}{\delta t} \cdot dt$$

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$$

$\vec{v}$: vitesse du pt. M en rotation pure.

Alors: $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ $\vec{\omega}$: vitesse angulaire totale veut
couple dans le cas général de 3 rotations suivant x, y et z

$$\delta W = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) \cdot dt$$

$$\delta W = \vec{\omega} \cdot (\underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{F}}_{\vec{\Gamma}}) dt = \vec{\omega} \cdot \vec{\Gamma} dt$$

$$\vec{\Gamma} = |\vec{\Gamma}| (-\vec{u}_3)$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_3$$

$$\delta W = \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_3 \cdot \vec{\Gamma} (-\vec{u}_3) = -\Gamma d\theta$$

$$\text{or: } \delta W = -dE_p \Rightarrow dE_p = +\Gamma d\theta$$

$$\Rightarrow dE_p = M \cdot B \cdot \sin\theta \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow E_p = M \cdot B \int \sin\theta d\theta$$

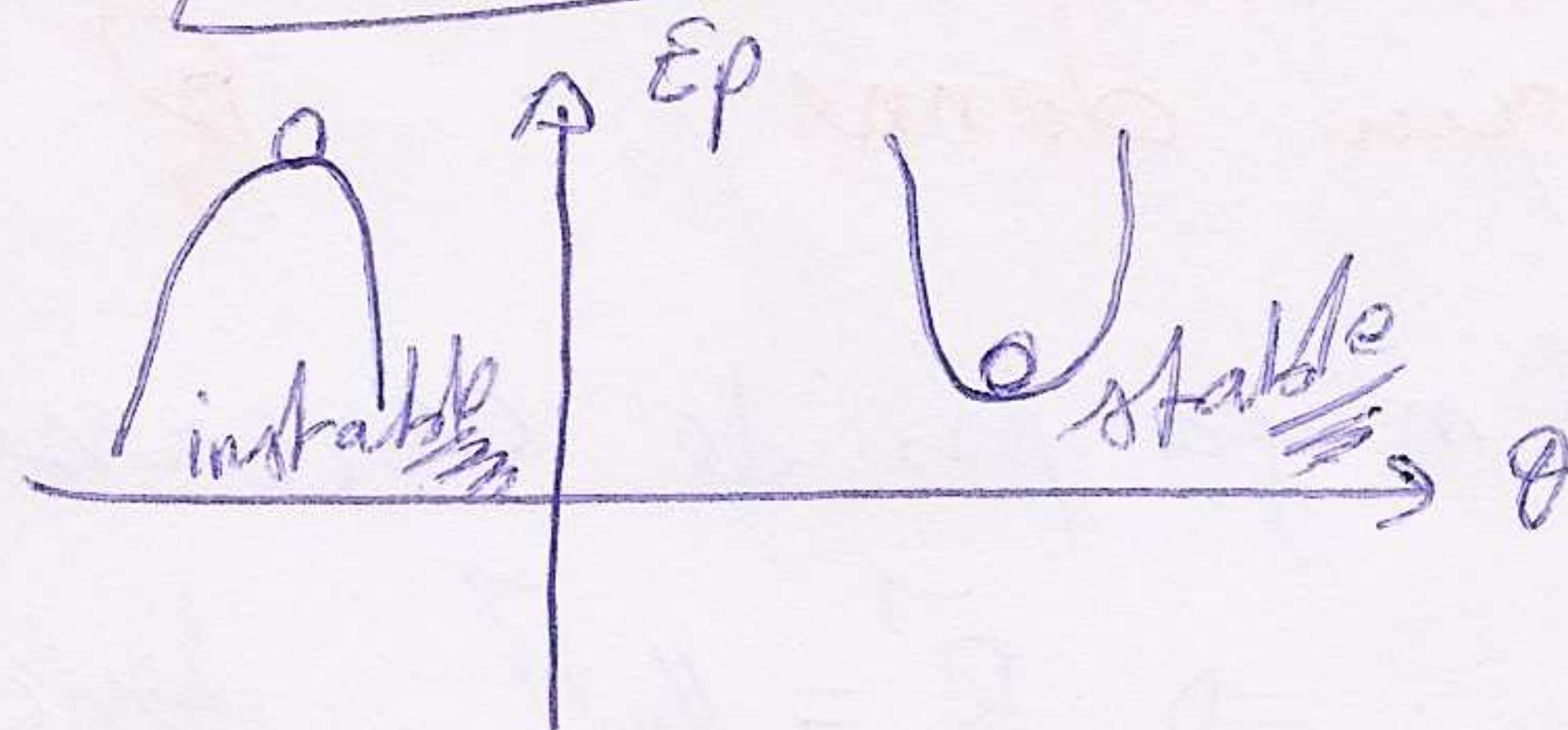
$$\Rightarrow E_p = -M \cdot B \cos\theta$$

en supposant la cte d'interprétation est nulle
or $\theta = (\vec{B}, \vec{M})$

$$\Rightarrow \boxed{E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}}$$

4°) Positions d'équilibre:

$$\boxed{\frac{dE_p}{d\theta} = 0}$$



si $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} > 0$ stable

si $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} < 0$ instable

$$\text{ona: } E_p = -M \cdot B \cos\theta$$

$$\rightarrow \frac{dE_p}{d\theta} = M \cdot B \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi \text{ pour un tour}$$

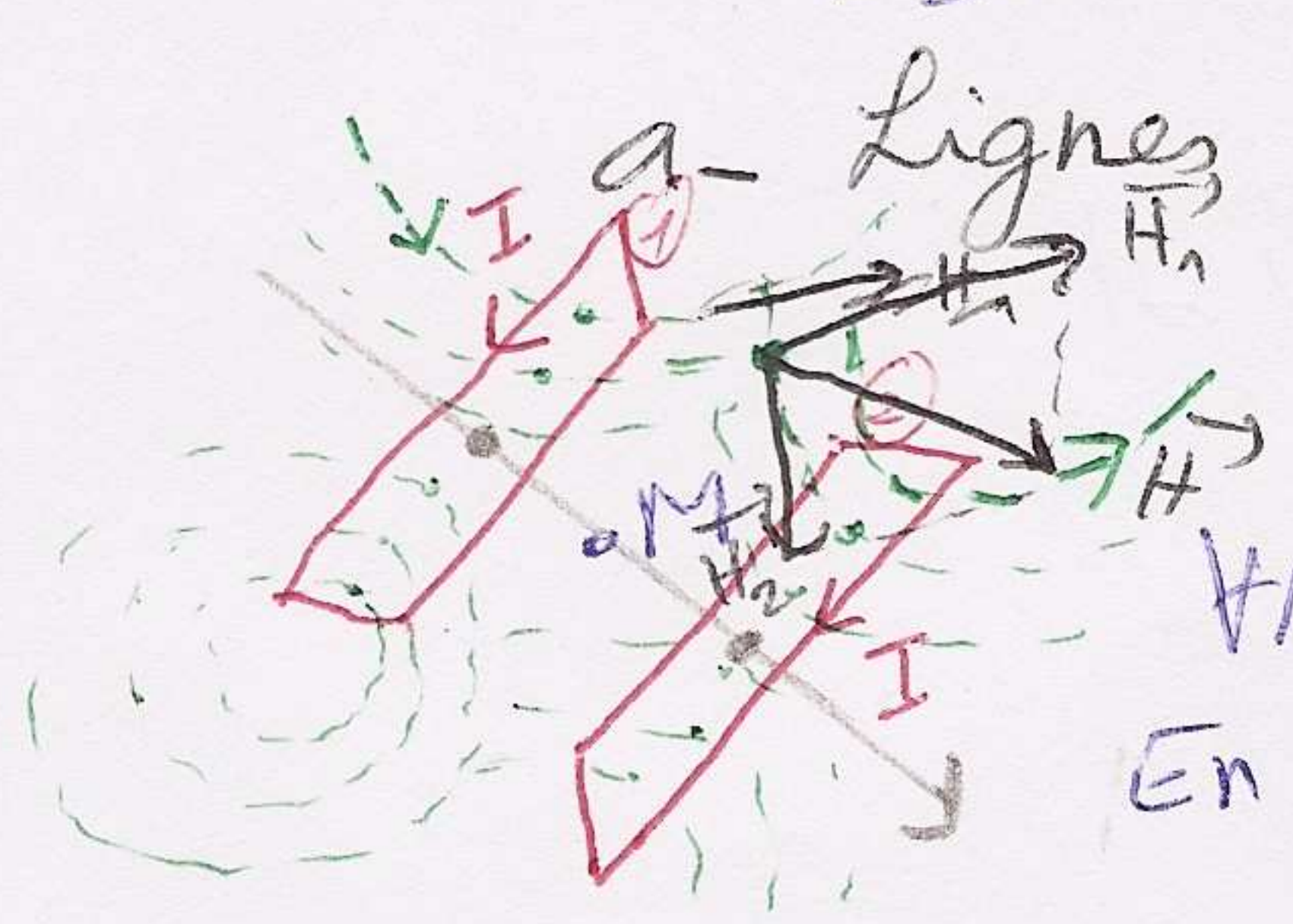
$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = M \cdot B \cos\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = \pi \Rightarrow \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} < 0 \rightarrow E_p < 0 \\ \theta = 0, E_p > 0 \end{cases}$$

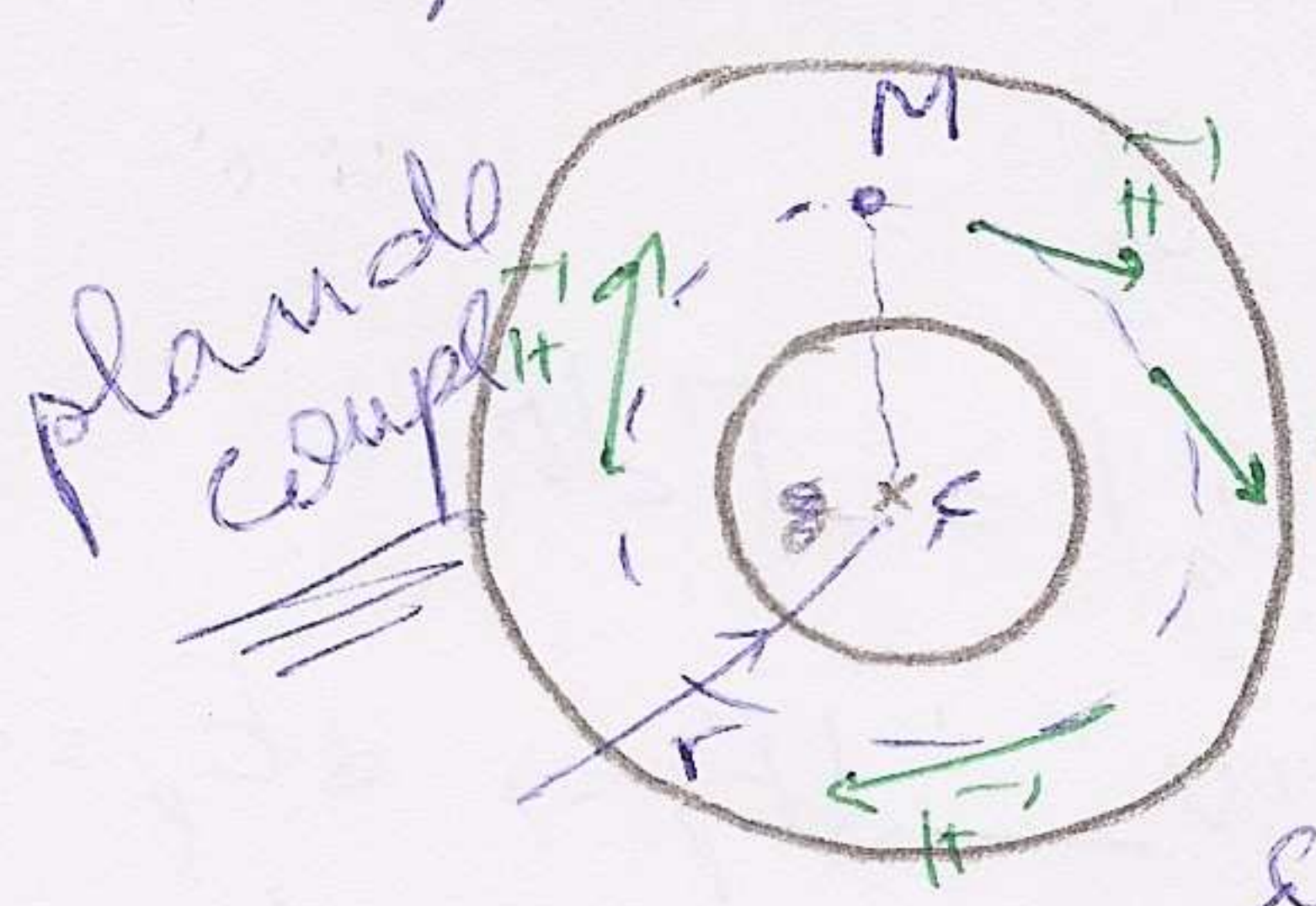
Ex 2

- 1^{re} étape: * Choix du repère et le dessin: voir figure
 * formule utilisée: th. d'Ampère: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma(I)$
 2^{ème} étape: Application du th. d'Ampère.

- Détermination de la courbe d'Ampère (Γ_A)
 a- Lignes de champs: (méthode identique à celle prise pour le solénoïde illimité)



En plus le champ doit être uniforme sur la ligne de champ
 Par conséquent les lignes de champ sont les cercles de centre des cercles Σ : projection de M sur l'axe z.



On considère (Γ_A) comme un cercle de centre Σ et de rayon $\Sigma M = r$
 b- Calcul de $\oint_{\Gamma_A} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma_A} H dl = H \oint_{\Gamma_A} dl = 2\pi r H$

* calcul de $\Sigma(I)$: N spires $\Rightarrow \Sigma(I) = NI$

* Application du th d'Ampère: $H 2\pi r = NI \Rightarrow$

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

N.B: } dans le vide $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
 flux $\rightarrow \vec{B}$ } dans un milieu: $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J})$

ce qui donne $\vec{H} = \frac{NI}{2\pi r} \vec{u}$

comme il n'y a pas de noyau: M est toujours dans le vide

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \text{ donc: } \vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{u}$$

N.B: champ nul à l'extérieur identique solénoïde illimité.

2^{ème} Il faut calculer le flux total envoyé par la bobine torique à travers elle-même que l'on note Ψ . Alors $\Psi = LI \Rightarrow L = \frac{\Psi}{I}$.

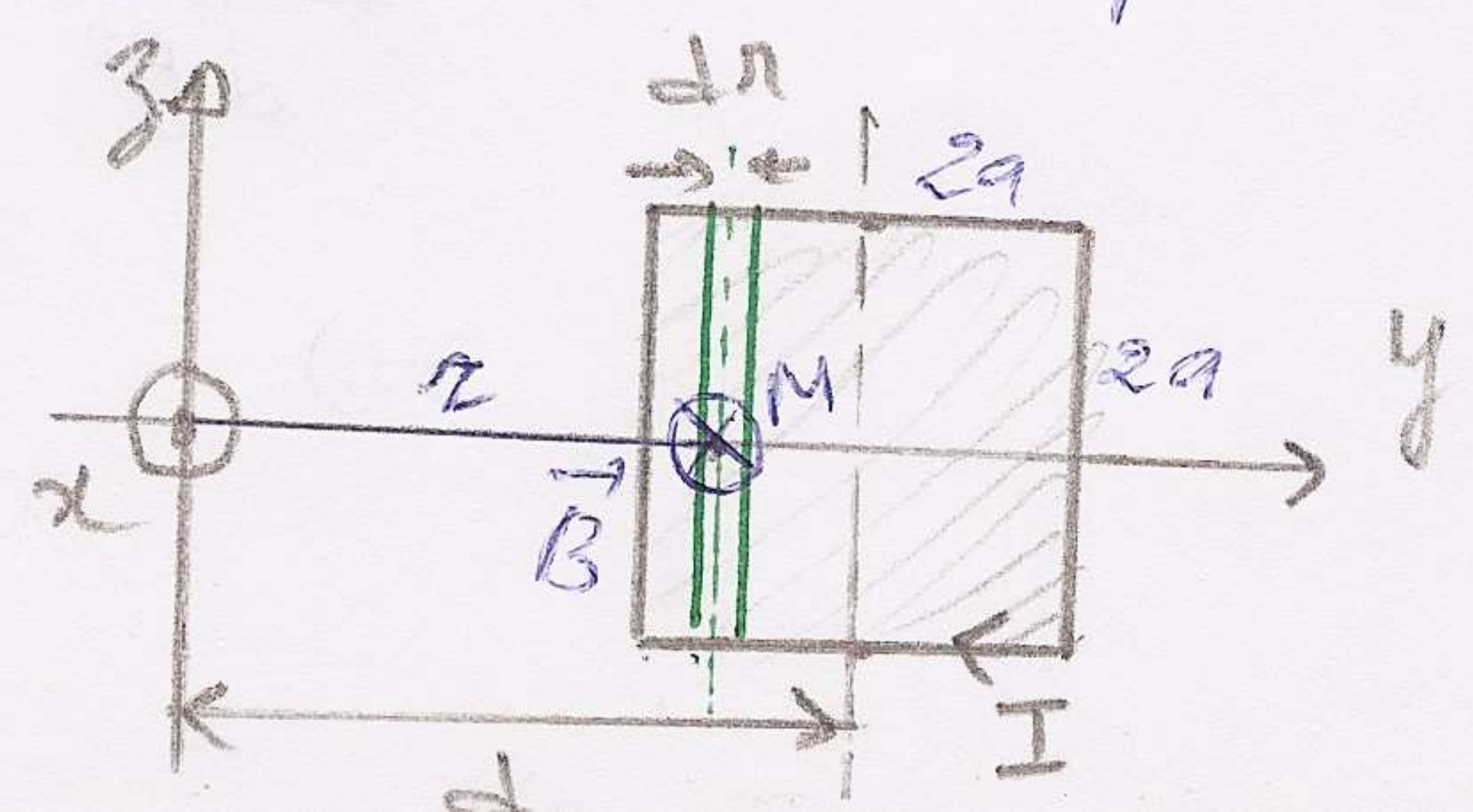
Et par déf: $\Psi = \int_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Soit ϕ le flux envoyé par $\vec{B}$ à travers 1 spire $\Rightarrow \Psi = N \phi$

$$d\vec{S} = N d\vec{s}$$

$$d\vec{s} = 2a dr (-\vec{u}_x)$$

et $\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} (-\vec{u}_x)$ dans le cas de la figure



$$\Rightarrow \Psi = \int_{r=d-a \rightarrow d+a} \frac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N^2 I a}{\pi} \left[\ln|r| \right]_{d-a}^{d+a} = \frac{\mu_0 N^2 I a}{\pi} \ln \left| \frac{d+a}{d-a} \right|$$

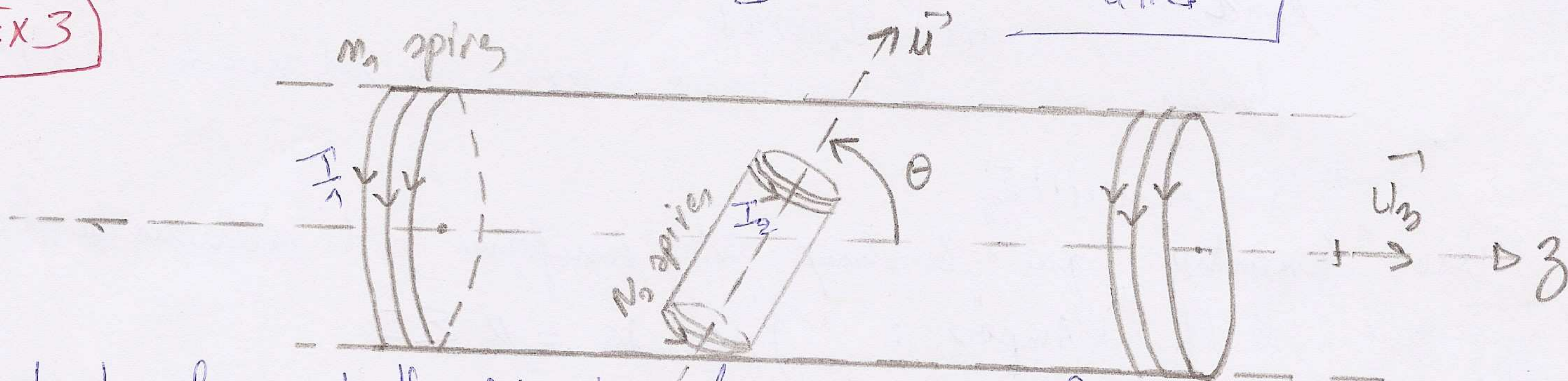
Ex 3

* Cas : $a \ll d$: $\frac{a}{d} \rightarrow 0$, on pose $\frac{a}{d} = \varepsilon$
et $f(\varepsilon) = \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$

D.L au m=1 : $f(\varepsilon) \sim \varepsilon = \frac{a}{d}$

$$\Rightarrow \Psi = \frac{\mu_0 N^2 I}{\pi} \cdot \frac{a^2 \times 4}{d} = \frac{\mu_0 N^2 I \Delta}{4\pi d} \quad \text{avec : } \Delta = 4a^2$$

Ex 3



Calculer la mutuelle M entre les 2 bobines ?

Comme on connaît $\vec{B}_1$ créé par un solénoïde infini.

$\left[\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{d} \vec{u}_3 \right]$: La bobine (1) sera active et la bobine (2) sera passive.

$$\Psi_{21} = M_{12} I_2 \quad \text{avec} \quad M_{12} = M_{21} \text{ noté } M$$

$$\Psi_{12} = M_{21} I_1$$

on choisit $\Psi_{12} = M_{21} I_1$ car on a $\vec{B}_1$

$$\Rightarrow \left[M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} \right]$$

* Calculer Ψ_{12} :

$$\Psi_{12} = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

$d\vec{S}_2$: surface de l'élémt passive

$\vec{B}_1$: induction de l'élémt active.

$d\vec{S}_2 = N_2 (d\vec{S}_2) \rightarrow$ surface élmt d'1 spire.

$$\Rightarrow \Psi_{12} = \int_{(S_2)} \mu_0 n_1 I_1 \vec{u}_3 \cdot N_2 d\vec{S}_2 \cdot \vec{u}$$

$$\Psi_{12} = \mu_0 n_1 N_2 I_1 \int_{(S_2)} \cos \theta dS_2$$

La bobine (2) est immobile $\Rightarrow \theta$ est fixe.

$$\Rightarrow \Psi_{12} = \mu_0 n_1 N_2 I_1 \cos \theta \int_{(S_2)} dS_2 = \mu_0 n_1 N_2 I_1 \cos \theta \Delta_2$$

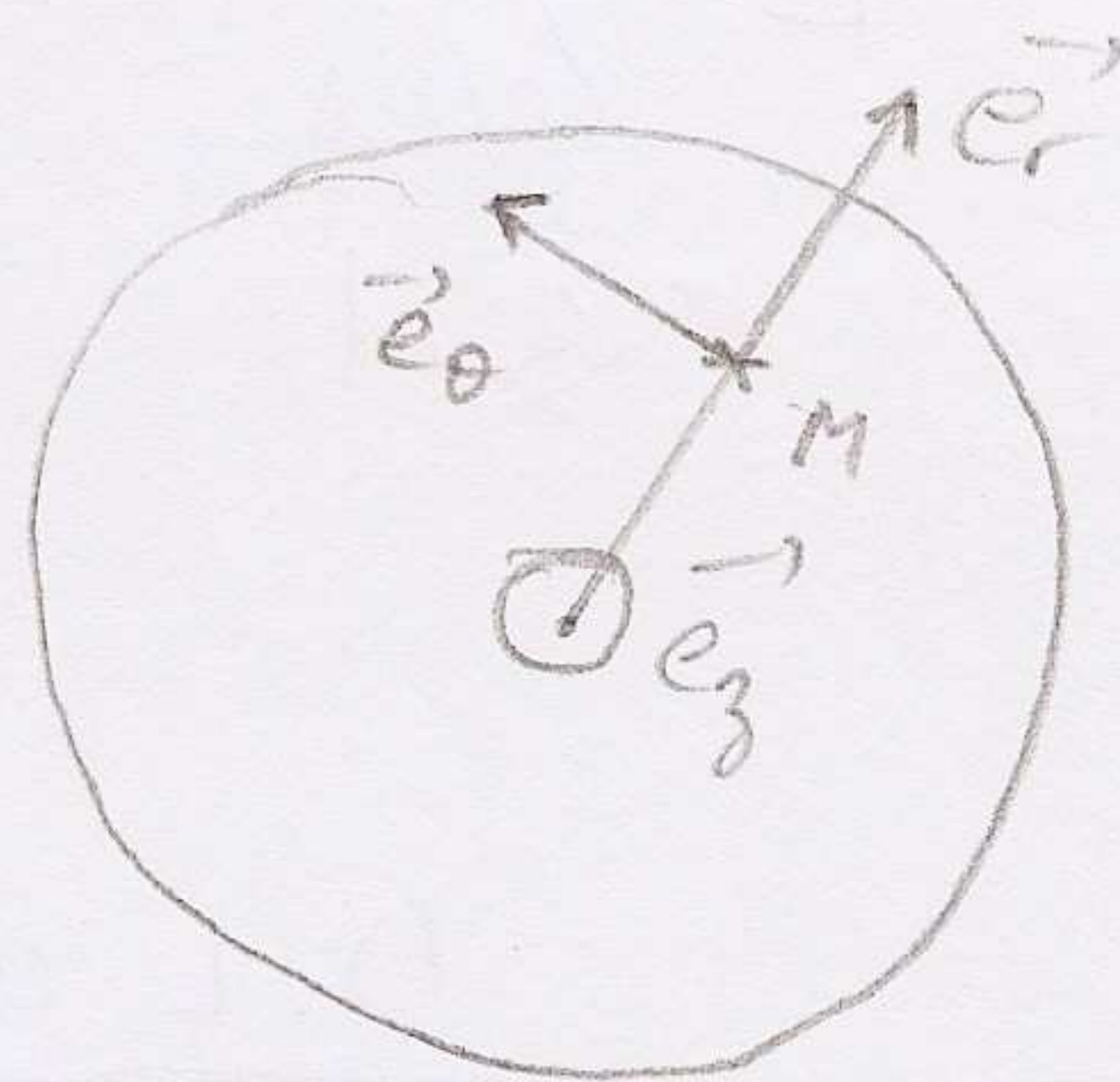
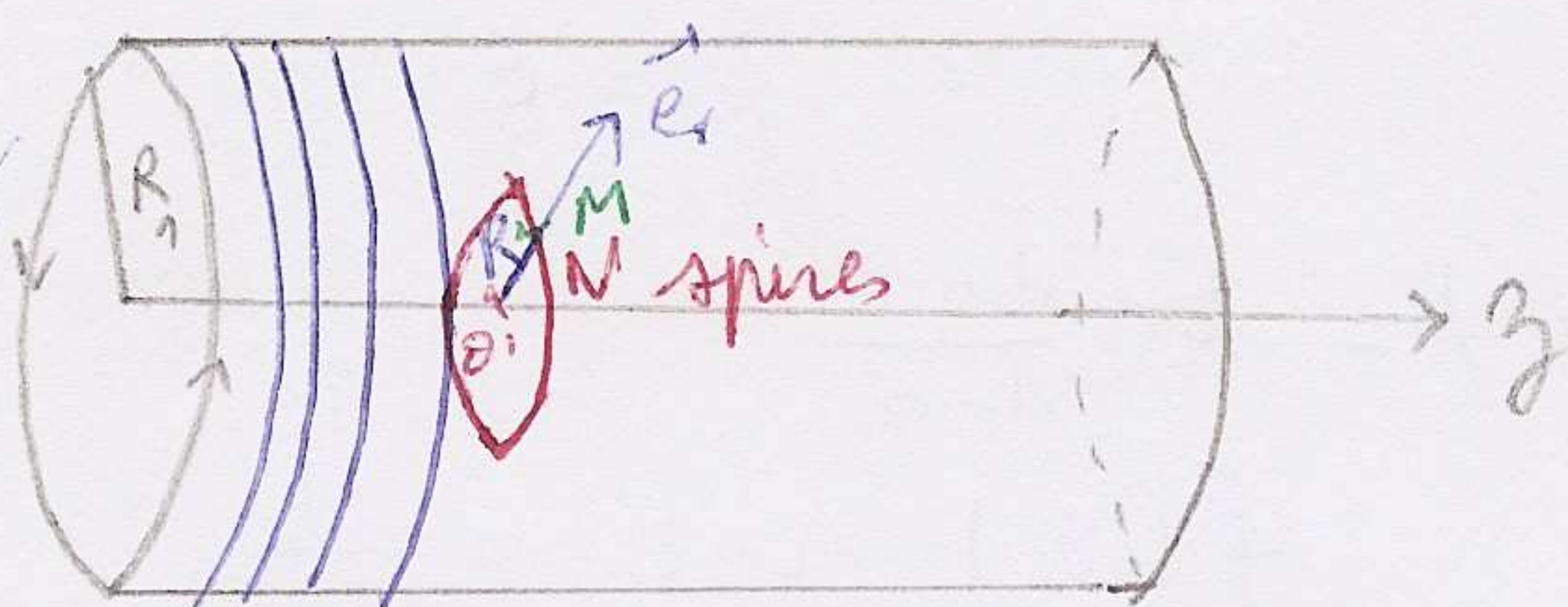
Δ_2 : surface d'un cercle de rayon R_2 (diamètre d_2)

$$\Delta_2 = \pi R_2^2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} \Rightarrow M =$$

Ex 4

n spires
par unité
de longueur



1° Le champ B créé par le solénoïde parcouru par un courant I est :

$$B = \mu_0 n i(t)$$

$$i(t) = I_0 \cos \omega t$$

le champ est orienté suivant l'axe du solénoïde (Oz)

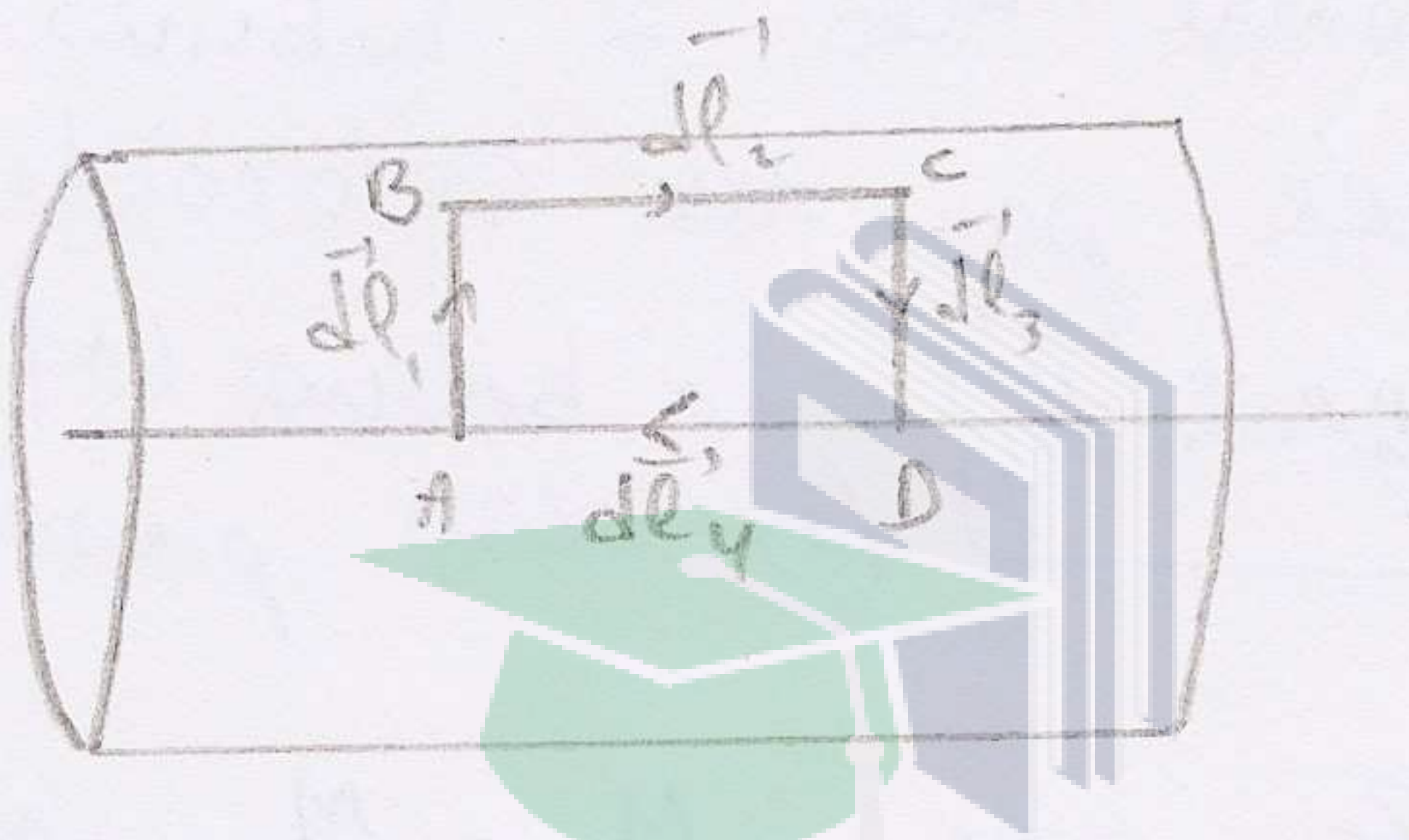
$$\Rightarrow B = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z$$

Pour démontrer que le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde on applique le th. d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{C} = \mu_0 \Sigma I$$

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{C} = \int_{AB} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{BC} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2$$

$$+ \int_{CD} \vec{B}_3 \cdot d\vec{l}_3 + \int_{DA} \vec{B}_4 \cdot d\vec{l}_4$$



$$\oint_{DA} \vec{B}_4 \cdot d\vec{l}_4 = \mu_0 \Sigma I = 0$$

comme la distribution des courants invariante suivant Oz et comme $\vec{B}_1 = \vec{B}_3$
 $d\vec{l}_1 = -d\vec{l}_3$, alors : $\int_{CD} \vec{B}_3 \cdot d\vec{l}_3 + \int_{AB} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = 0$

$$\text{il reste : } \int_{BC} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \int_{\mu_0 n i(t) \vec{e}_z} d\vec{l}_4 = 0 \quad (d\vec{l}_2 = -d\vec{l}_4)$$

$$\Rightarrow \int [B_2 - \mu_0 n i(t)] \vec{e}_z = 0 \Rightarrow B_2 = \mu_0 n i(t)$$

A l'intérieur du solénoïde le champ B est uniforme $B = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z$

2° Le potentiel vect $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}$ avec $\vec{r} = \vec{OM}$

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = z \vec{e}_z + R \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{1}{2} \mu_0 n i(t) \vec{e}_z \wedge (z \vec{e}_z + R \vec{e}_r)$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 n i(t) R \vec{e}_\theta$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{1}{2} \mu_0 R n I_0 \cos \omega t \vec{e}_\theta}$$

on en déduit le champ électromoteur.

EB(4)

$$\vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 R \omega \sin \omega t \vec{e}_\theta$$

37 La force électromotrice est égale à la circulation du champ électromoteur le long de la spire :

$$e = \oint_{N \text{ spires}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 R \omega \int_0^{2\pi} \sin \omega t \cdot R \cdot d\theta \times N$$
$$= \frac{1}{2} \mu_0 n N I_0 R^2 \omega \sin \omega t 2\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \mu_0 n N \pi R^2 \omega \sin \omega t}$$

4° Calculons le flux du champ magnétique B créé par le solénoïde à travers la bobine (N spires).

$$\Phi = N \iint_{\text{surface d'une spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \vec{B} \cdot \vec{S} \quad \left(\text{car } \vec{B} = \text{cte à l'intérieur du solénoïde} \right)$$

$$= N B \pi R^2 = N \mu_0 n I_0 \cos \omega t \pi R^2$$

la force électromotrice

$$\boxed{e = - \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 n N \pi R^2 I_0 \omega \sin \omega t}$$

E2 : Courant Alternatif

Exercice 1:

Déterminer l'impédance complexe Z_{AB} entre les points A et B pour chacun des circuits suivants.

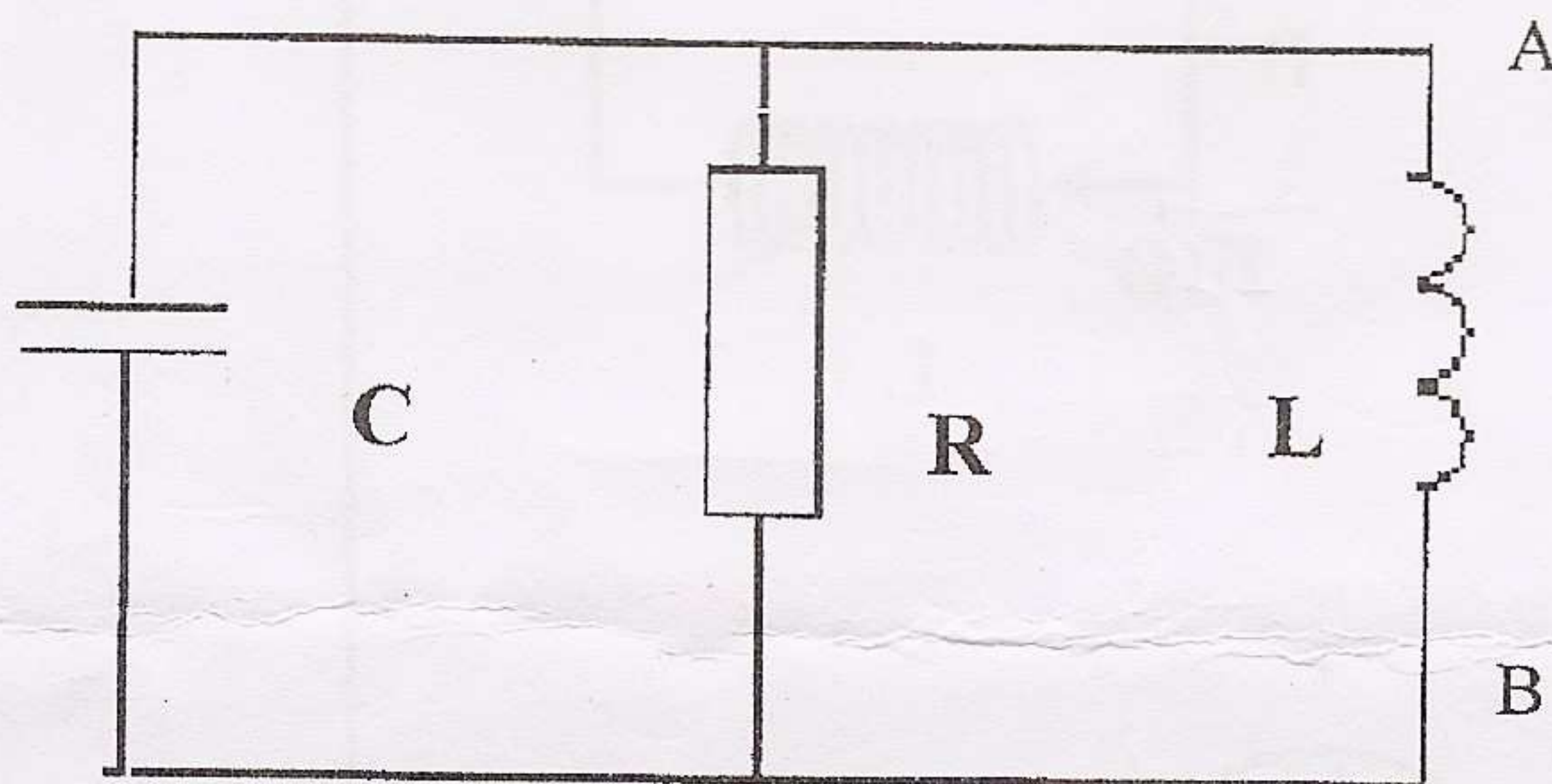


figure 1

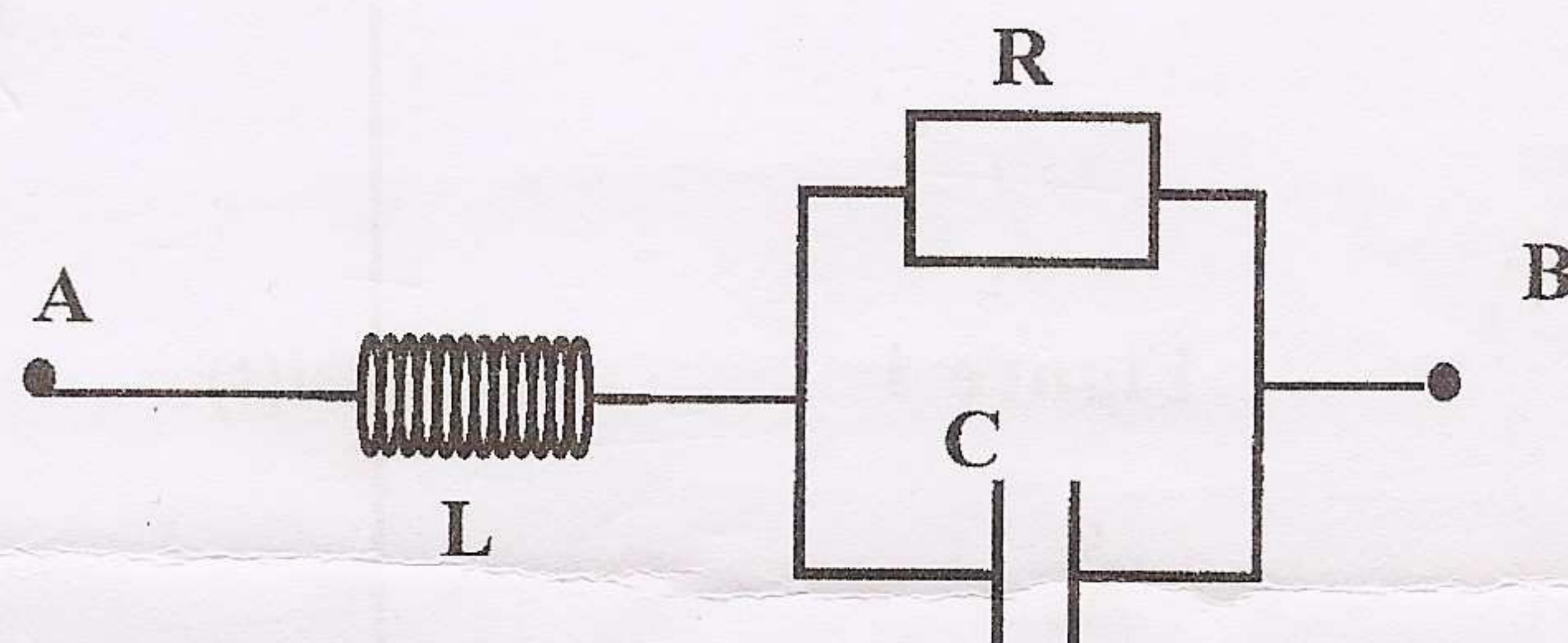


figure 2

En déduire le module et l'argument de Z_{AB} pour chaque circuit.

On veut remplacer chacune des deux associations considérées par deux éléments passifs branchés en série entre A et B. Quelles sont la nature et la valeur de la grandeur caractéristique de chaque élément pour une fréquence de 50Hz sachant que $R=100k\Omega$, $C=200\mu F$ et $L=100mH$.

Exercice 2:

On considère le montage de la figure 2 branché à un générateur délivrant une tension sinusoïdale de la forme $u(t)=U_m \cos \omega t$.

1. Calculer le courant $i_R(t)$ traversant R par la méthode de Thevenin.
2. Calculer les courants $i_L(t)$ et $i_C(t)$ traversant L et C respectivement.
3. Calculer les puissances actives et réactives dans chaque branche. Établir le bilan des puissances.

Exercice 3:

On considère le montage représenté sur la figure 3. Le générateur de tension sinusoïdale $v(t)$ délivre un courant de la forme $i(t)=I_m \cos \omega t$.

1. Donner l'expression de $v_1(t)=v_B-v_D$.
2. Calculer les courants $i_L(t)$ $i_C(t)$ traversant respectivement la bobine et le condensateur.
3. calculer le déphasage entre l'intensité $i(t)$ et la tension $v(t)$ du générateur.

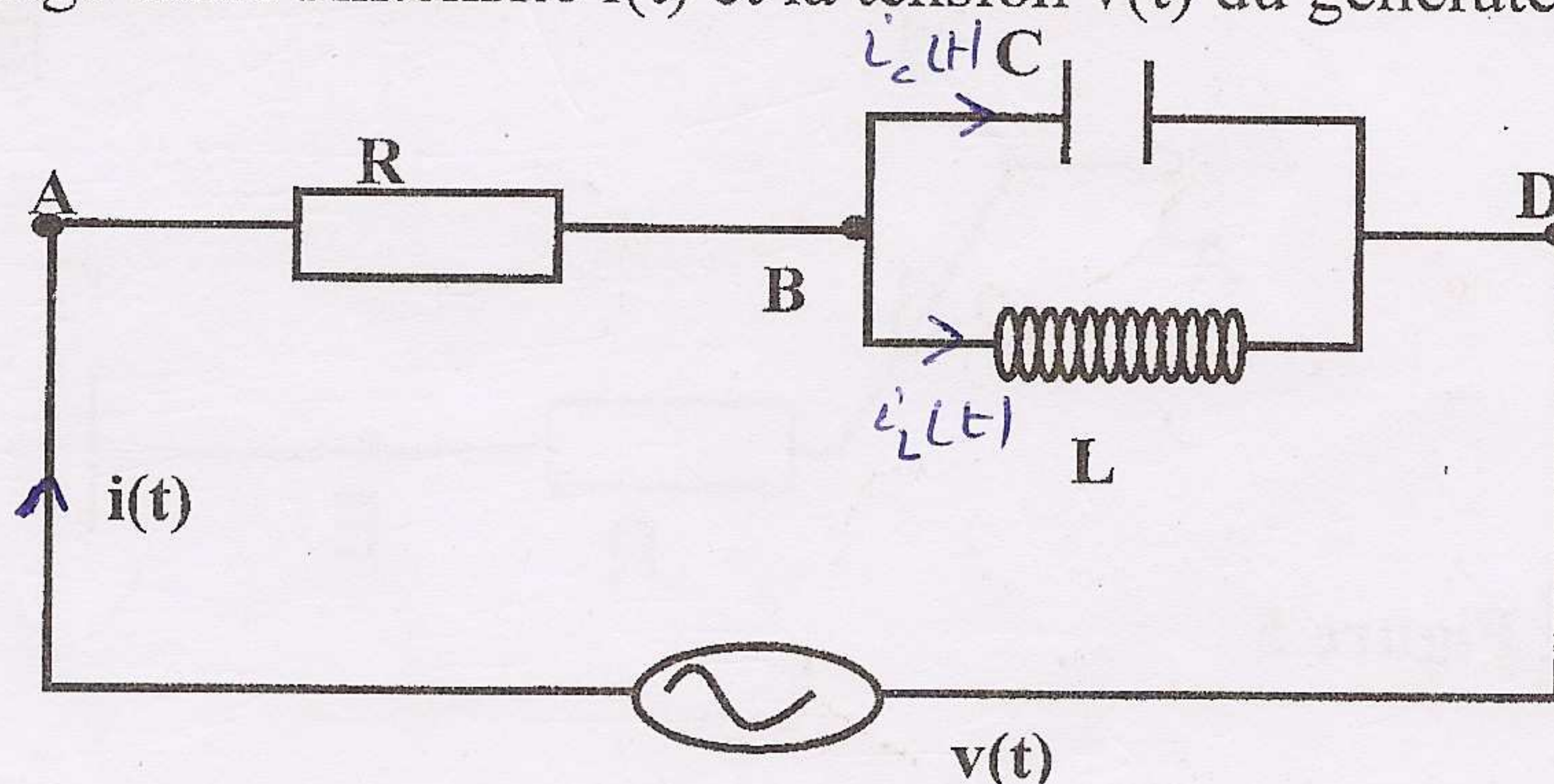


Figure 3

Exercice 4 :

Le réseau représenté sur la figure 4 est alimenté par une tension sinusoïdale $V_A - V_B = v(t)$ appliquée entre A et B et de valeur efficace V .

Dans quelle condition l'intensité efficace $\bar{I}_1$ de $i_1(t)$ est elle indépendante de l'impédance Z ?

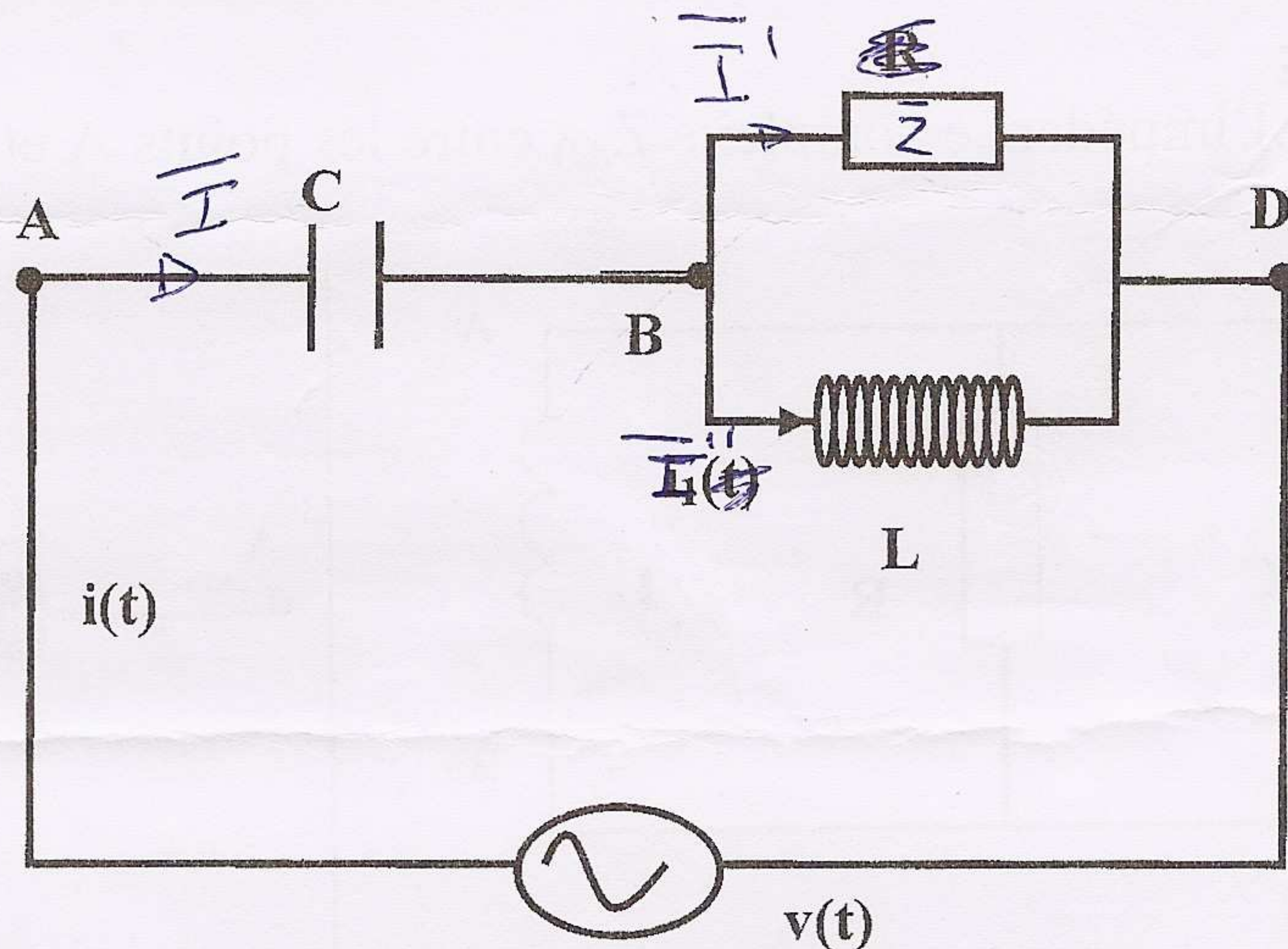


Figure 4

Exercice 5 :

On considère le montage représenté sur la figure 5. On applique entre A et B une tension $u_m = U_m \cos \omega t$ de valeur efficace U .

- 1) Trouver l'impédance complexe équivalente à ce tronçon AB.
- 2) Déterminer l'expression du déphasage de l'intensité par rapport à la tension u .
- 3) Quelle relation doit exister entre L , C et ω pour que l'impédance Z soit équivalente à celle d'une résistance pure. Donner son expression.
- 4) On peut obtenir ce même résultat en donnant à R une valeur particulière. Quelle est la valeur de cette résistance équivalente.
- 5) Evaluer les intensités efficaces I_1 et I_2 dans les deux branches (figure 2).
- 6) Lorsque la condition en 3) est réalisée, Evaluer, le déphasage ϕ_1 de i_1 par rapport u et le déphasage ϕ_2 de i_2 par rapport u . Comparer ϕ_1 et ϕ_2 et donner les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
- 7) En partant de ces dernières expressions, évaluer l'intensité $i(t)$ et comparer la valeur de I_m avec celle obtenue à partir de la résistance équivalente du tronçon AB

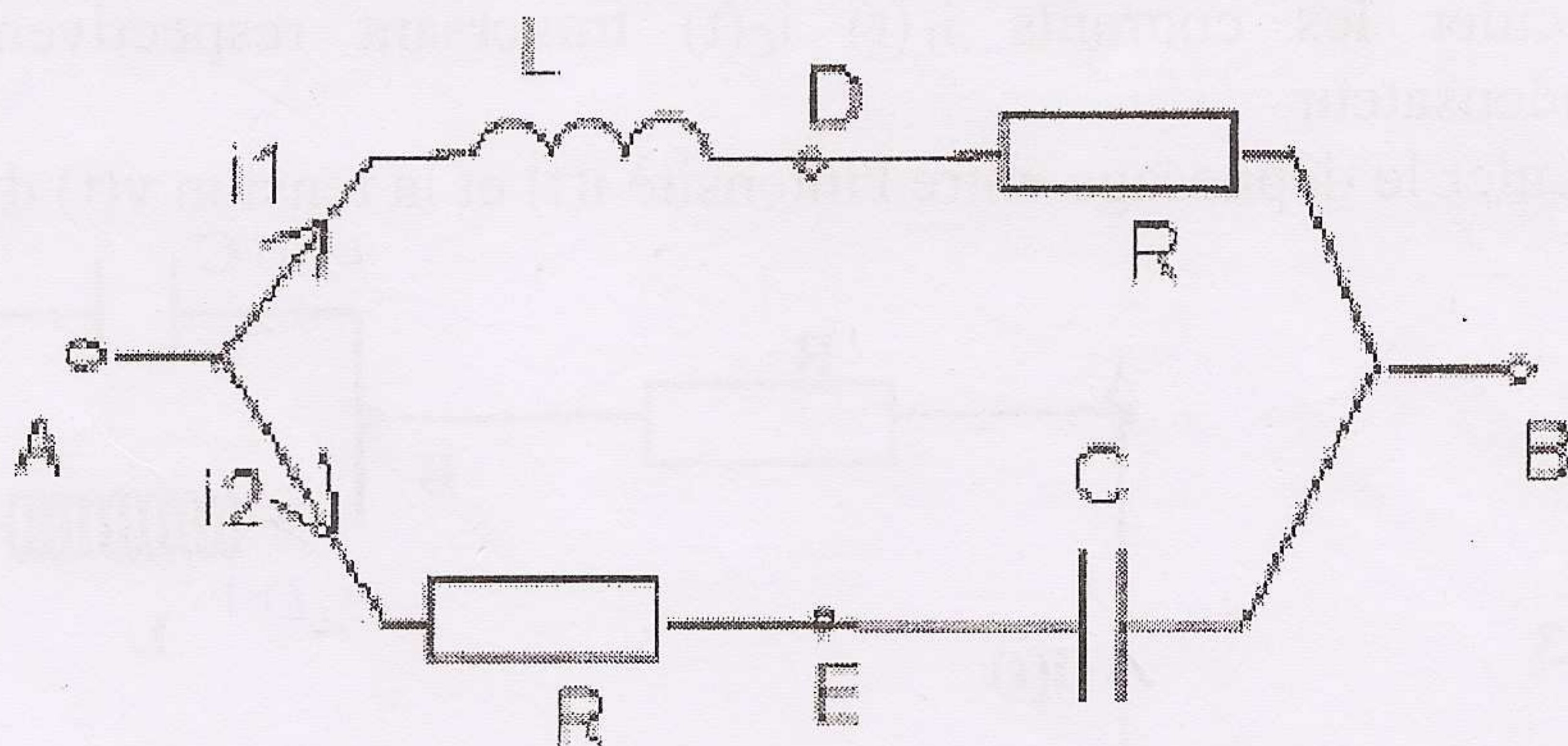


Figure 5

Rappel :

I° / Approximation des états Quasi-stationnaires :

1° / Etude des réseaux en courant continu :

a- étude des " " " " " courant continu

Les différentes th.s et lois en ~~se~~ utilise sont :

- | | | |
|---|---|------------------------|
| * Loi d'ohm : | { | * Th. de Millman |
| * Loi de Pouillet (Loi d'ohm généralisée) | | * Th. de superposition |
| * Loi des nœuds | | * Th. de Thevenin |
| * Loi des Mailles | | * Th. de Norton |

NB. : il y a une équivalence entre générateurs de tension et générateurs de courant.

* Règles de simplification :

- mise en série et mise en // des résistances
- " " " " " des selfs
- " " " " " des condensateurs

* Transformation de Kennelly : étoile $\longleftrightarrow$ triangle

En courant continu : un condensateur parfait = coupe circuit $\equiv$ circuit ouvert.

une inductance (L, r) : on la remplace par $\frac{r}{s}$.

si elle est parfaite on la remplace par un fil ($r=0$).

2° / Etude des réseaux en courant alternatif :

Pour 1 variation qq du temps environ 6 ou 7 grandeurs qui varient
en particulier : t, fréquence, longueur d'onde, ...

Pour 1 variation très lente du temps : (Approximation des états Quasi-stationnaire)

toutes les grandeurs restent fixes, seule la variable temps varie.

Les coeffts : R, L, C, N ... restent fixes.

tout ce qui a été fait pour le courant continu reste valable pour les courants Alternatif (en Quasi-stationnaire) donc pour les AC sinusoïdaux.

II° / Méthodologie :

1° / Type de réseaux :

réseau θ formé
de R, L, M, C, f.ém
et d.d.p.

considérons un réseau qq en AC constitué d'élmts R, L, M, C qui sont cts. f, e, m, f, e, m ($e(t)$), f, e, e et d.d.p ($v(t)$)

Nous voulons que toutes les grandeurs du réseau soient connues
 en général nous obtenons des équations du type $v(t) = f(i(t))$ ou :

$$i(t) = g(v(t))$$

En règle générale se sont des equ. diff^{elles} c-à-d pour $e(t)$ et $e'(t)$
 ou un syst. d'equ. diff^{elles} à résoudre.

2^e Méthode de résolution : plusieurs méthodes $\exists$, mais nous intéressent seulement 3.

A- Méthode générale : méthode qui résout les eq. diff^{elles} en fct. du temps.

Cette méthode donne la sol. globale donc le régime transitoire (S.E.S.S.M) et le régime permanente (S particulier)

1^{er} type d'equ. diff^{elles} : equ. diff^{elles} du 1^{er} degré à coeffs cts
 (jeudi 14^h - 16^h) (K)

soit $ay' + by = A \cos(\omega t + \varphi)$

soit $ay'' + by' = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$

$y' = z \Rightarrow az' + bz = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$

On résoud. l'equ. S.S.M (facile) $ay' + by = 0$ et on cherche une sol. part. du type 2^e membre.

2^e type : $ay'' + by' + cy = A \cos(\omega t + \varphi)$

on résoud l'equ. S.S.M $ay'' + by' + cy = 0$ en posant $y = e^{rt}$

$\Rightarrow$ equ. caractéristique $ar^2 + br + c = 0$

$\Rightarrow \Delta$

si $\Delta > 0$ 2 racines réelles $y = I_1 e^{r_1 t} + I_2 e^{r_2 t}$

si $\Delta = 0$ 1 racine double $y = (A + Bt) e^{r t}$

si $\Delta < 0$ 2 racines complexes : $y = e^{\alpha t} \cos(\omega t + \alpha)$

Il faut au plus trouver une sol. part $A \cos \omega t + B \sin \omega t$
 du type du second membre

Conclusion: $y_{tot} = y + y_p$

Or ce qui nous interesse c'est le régime permanent.
Donc la solution part. (obtenue au bout d'un temps suffisamment long).

∃ 2 méthodes pour déterminer le régime permanent directement
la méthode algébrique ou encore méthode des impédances complexes
" vectorielle " " des diagrammes de Fresnel

b - méthode des impédances complexes:

Nous l'étudions pour la d.d.p $v(t)$ mais il est évident que le m^e raisonnement est applicable aux f.e.m $e(t)$, f.c.e.m $e'(t)$ et aux c.rts $i(t)$.

Soit la d.d.p $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$

on lui associe la grandeur complexe $\bar{v}(t)$ tel q:

$$\bar{v}(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) + j V_m \sin(\omega t + \varphi)$$

évidemment: $v(t) = \text{Re} \{ \bar{v}(t) \}$.

$$\bar{v}(t) = V_m e^{j(\omega t + \varphi)} = V_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$

on pose $\bar{V} = V_m e^{j\varphi}$ et on appelle amplitude complexe
on pose pour:

$$\left. \begin{array}{l} \text{f.e.m} \quad E = E_m e^{j\varphi_1} \\ \text{f.c.e.m} \quad E' = E'_m e^{j\varphi_2} \end{array} \right\} \bar{I} = I_m e^{j\varphi_3}$$

$$\begin{aligned} \text{ce qui donne } e(t) &= \bar{E} e^{j\omega t} \\ e'(t) &= \bar{E}' e^{j\omega t} \end{aligned} \quad i(t) = \bar{I} e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} \text{et alors } e(t) &= \text{Re} \{ \bar{e}(t) \} \quad \text{et } i(t) = \text{Re} \{ \bar{i}(t) \} \\ e'(t) &= \text{Re} \{ \bar{e}'(t) \} \end{aligned}$$

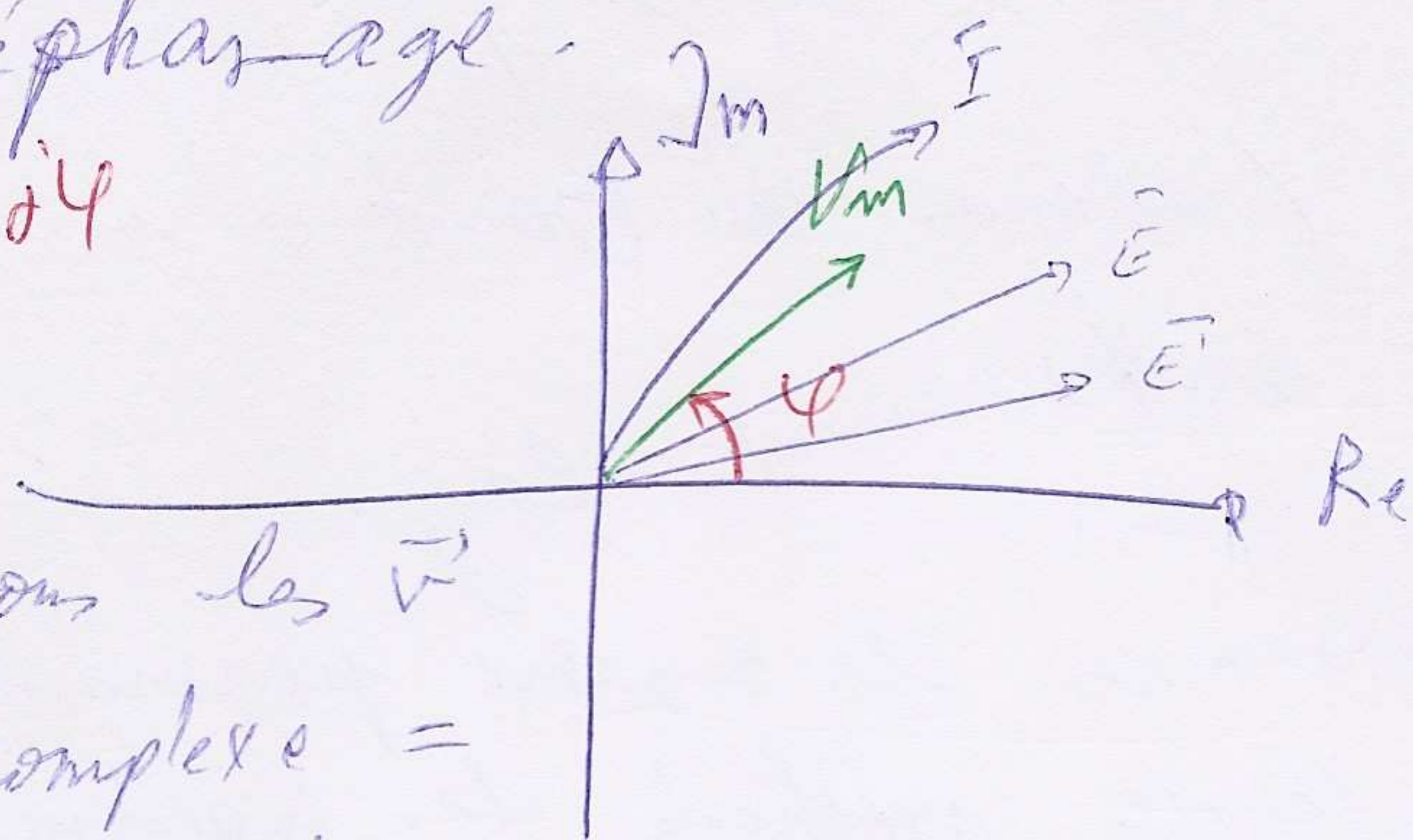
Conc: Nous avons éliminé le temps des équ. diff.

il reste des équ. algébriques à résoudre.
Il faut d'abord trouver l'équ. diff. et ensuite leur associé une équ. algébrique.

c - Méthode vectorielle: on associe à chaque amplitude

complexe, un vecteur
Echelle des courants et échelle des tensions)
avec le déphasage.

$$V = V_m e^{j\varphi}$$



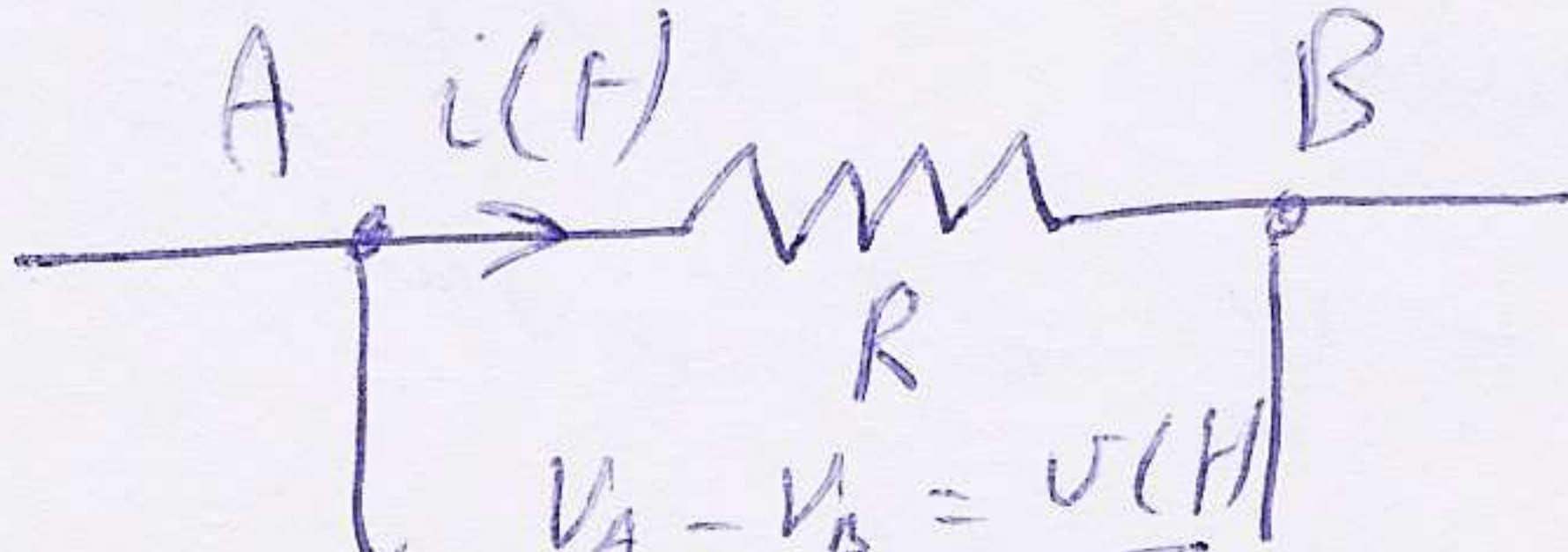
Or pour tous les $\vec{v}$
la grandeur complexe =
d'amplitude complexe
multiplié par $e^{j\omega t}$

Donc ω la pulsation (ou la vitesse angulaire de $\vec{v}$)
est la même pour tous.

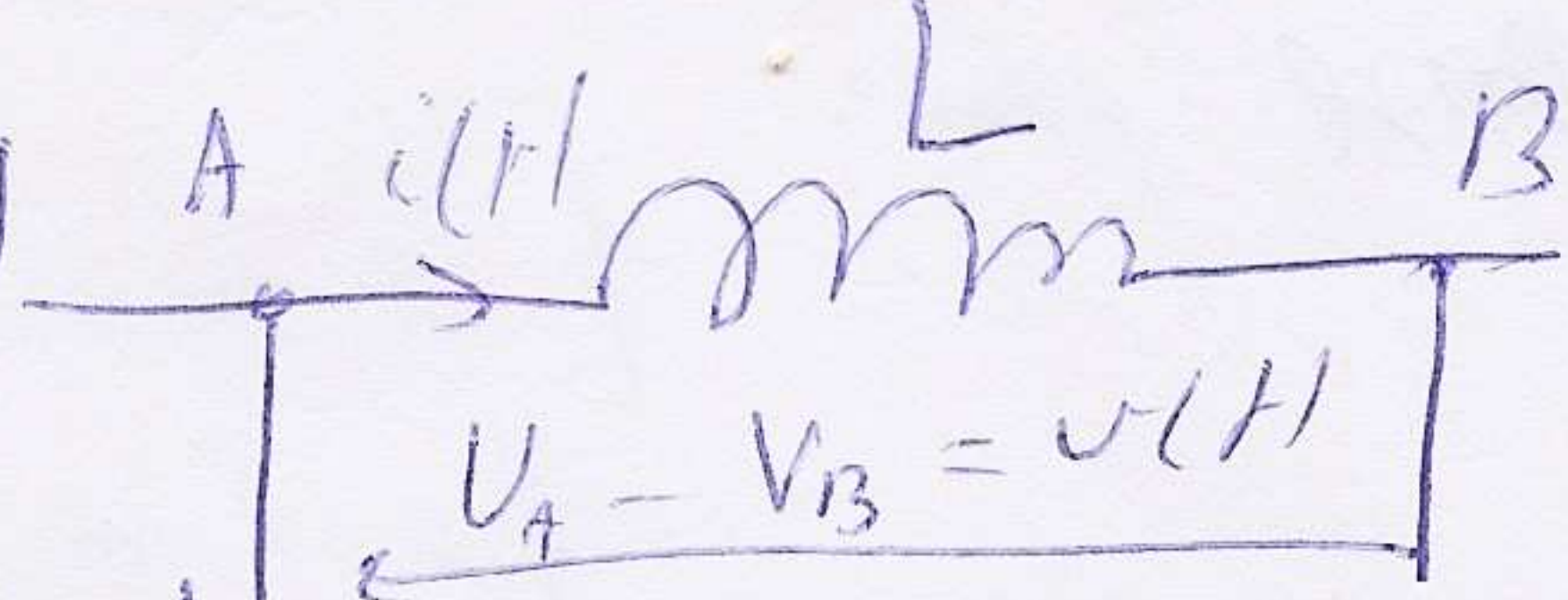
Donc la fig que forment les vect - dans le plan complexe
est invariable c'est le plan de Fresnel.

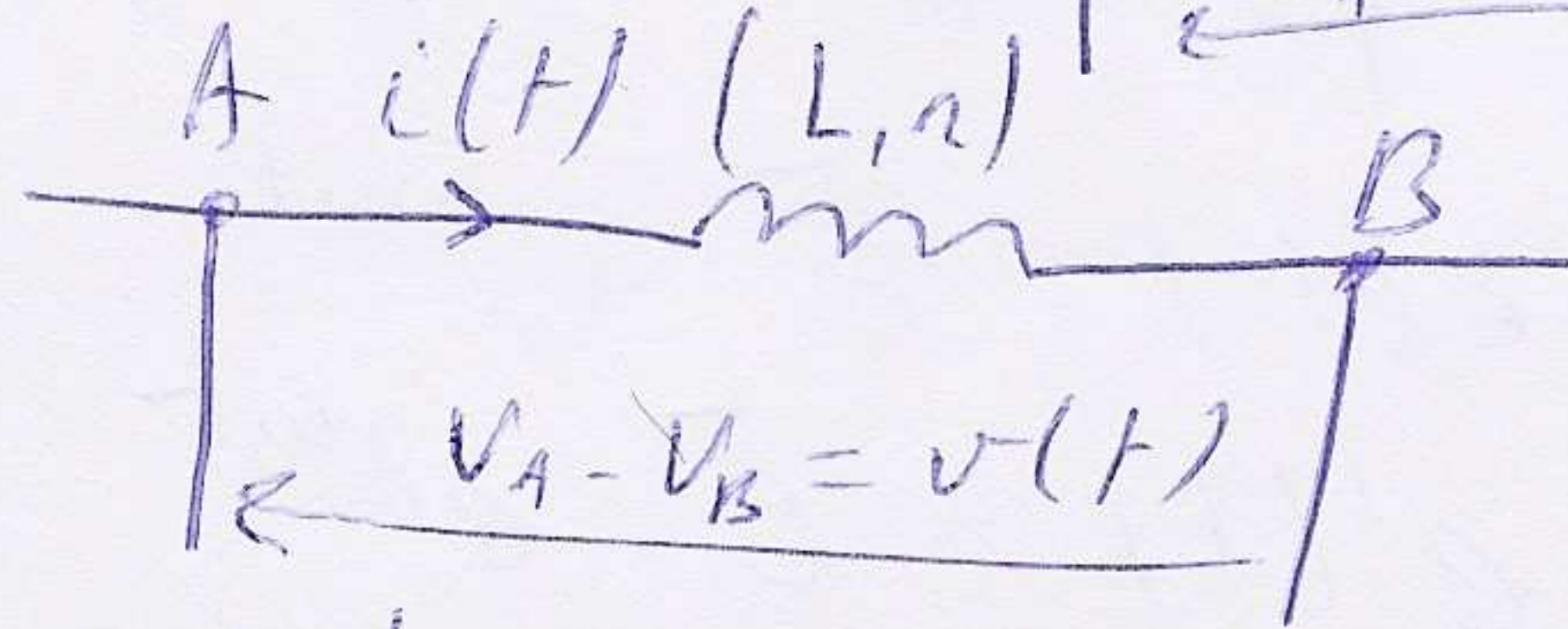
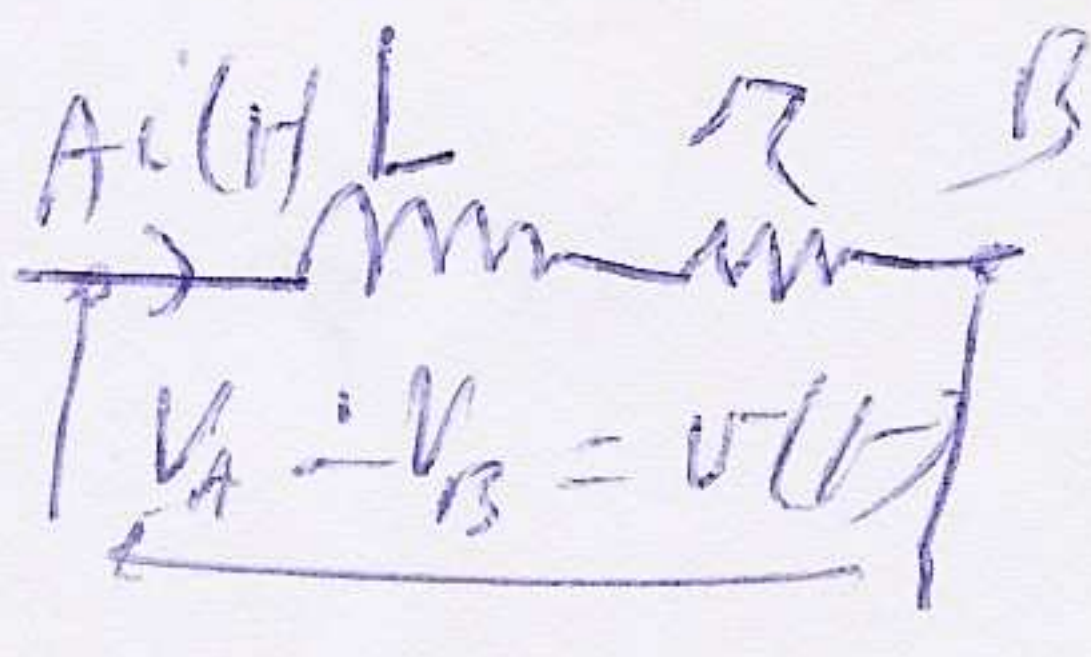
Rmq: Dans le syst. à résoudre par la méthode temporelle
toutes les grandeurs qui interviennent sont de type : $e(t), e'(t), v(t), i(t), \dots$

Principale d.d.p qui intervient.

* Résistance Morte:  $\Rightarrow V_A - V_B = v(t) = R \cdot i(t)$

* Inductances: Inductance propre parfaite (=pure): (pas de résistance) interne

$V_A - V_B = v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = -e(t)$ 

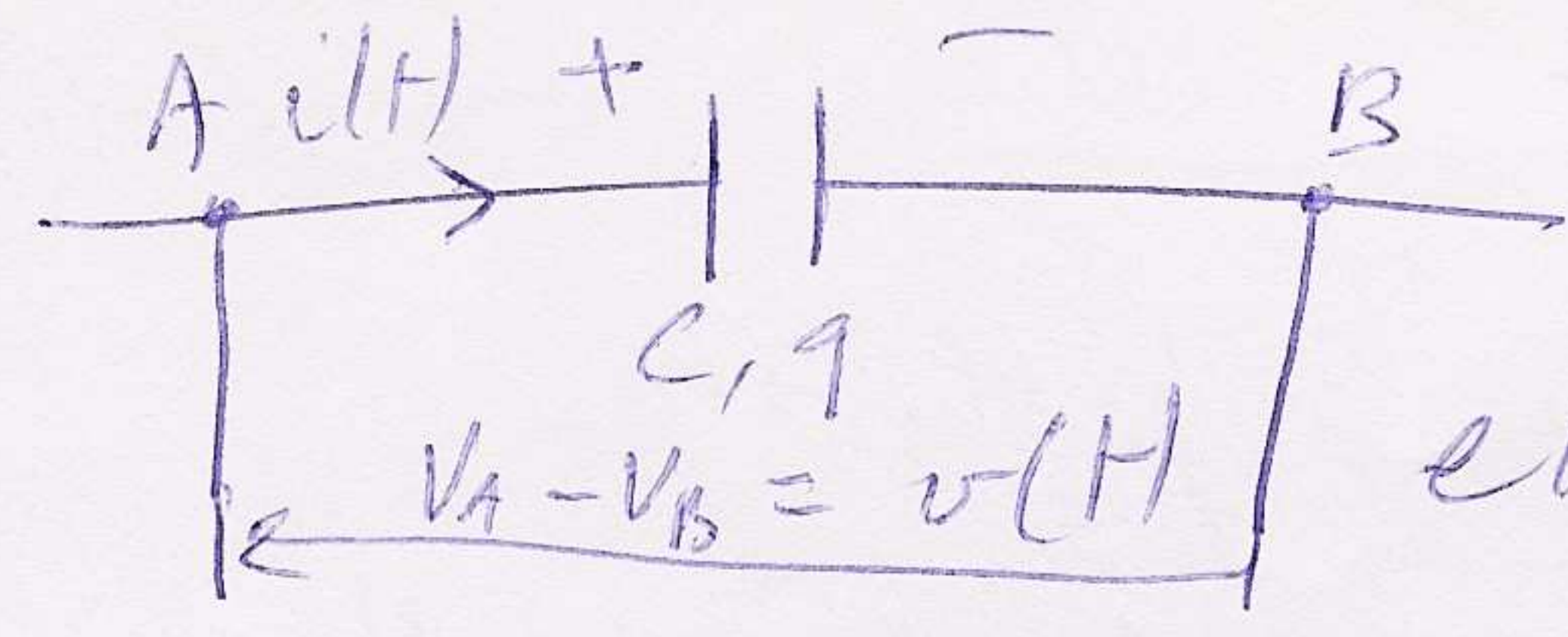
- Inductance propre réelle:  $\Rightarrow$ 

$$V_A - V_B = L \cdot \frac{di(t)}{dt} + r \cdot i(t)$$

* Mutuels: Ils sont traités de la même manière que les selfs sauf
qu'il y a 2 bobines: une parcourue par $i(t)$, et l'autre par $i'(t)$
 $v(t) = M \cdot \frac{di'(t)}{dt}$

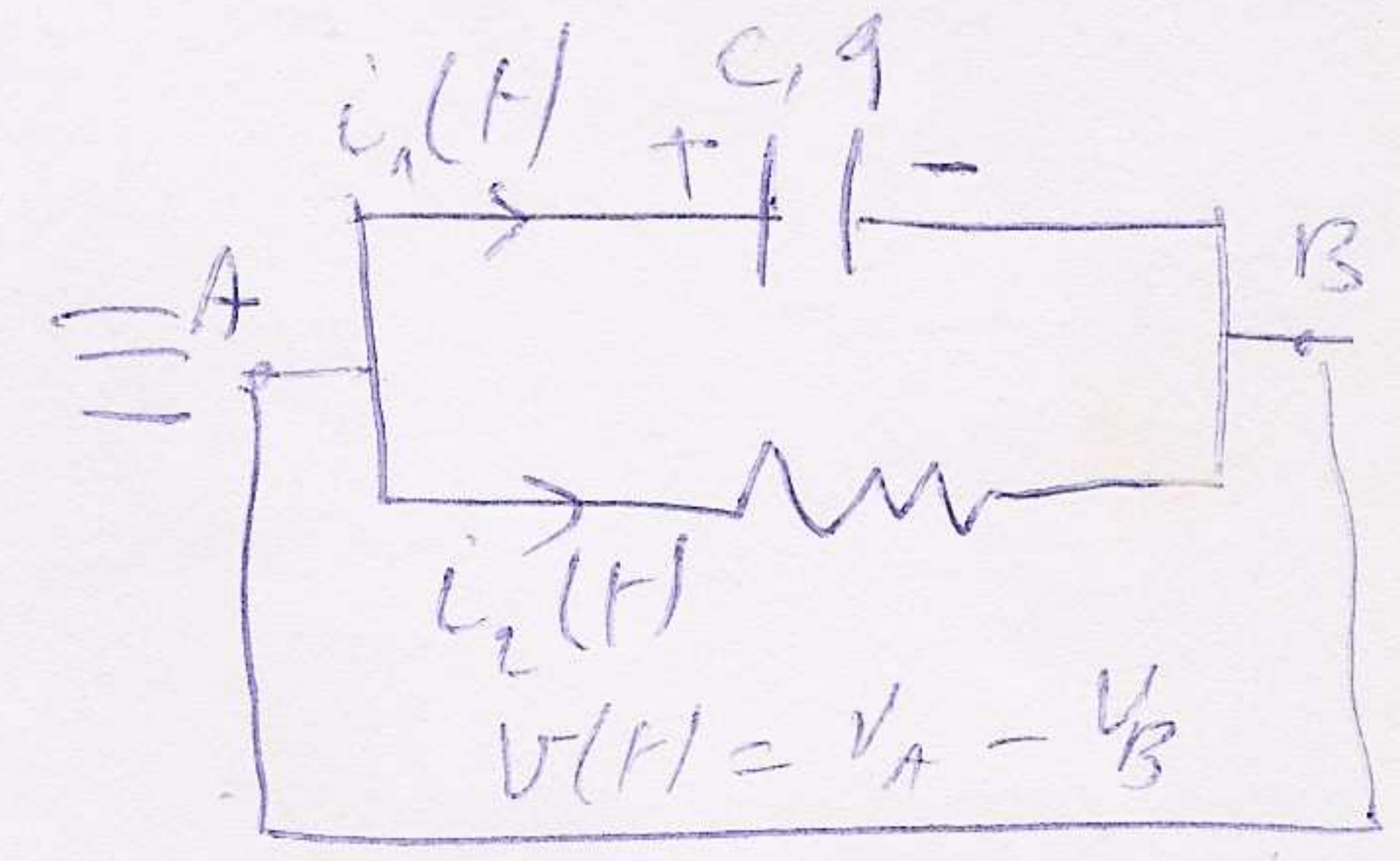
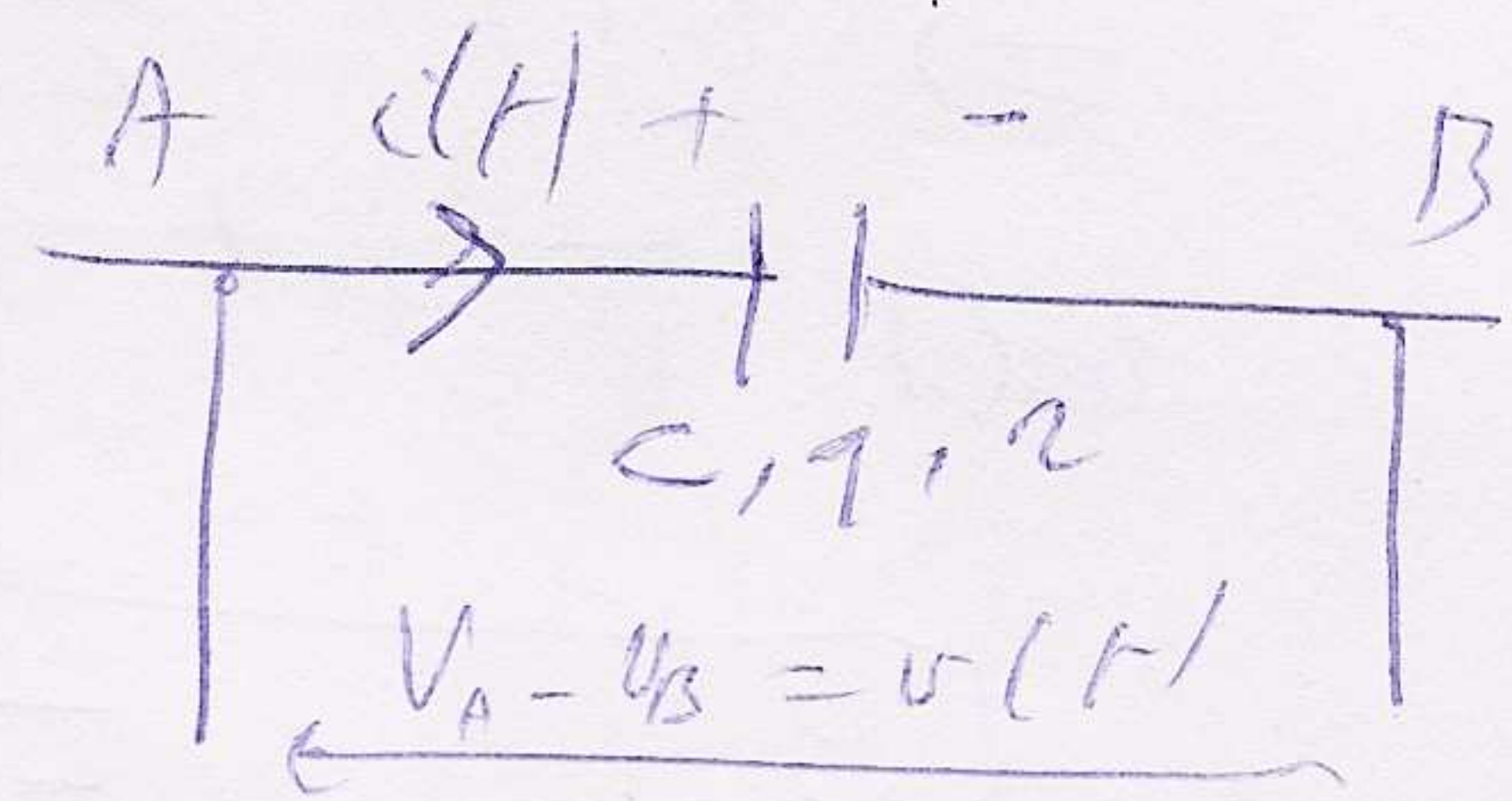


* Condensateurs: * Condensateur parfait:



$q(t) = C \cdot v(t)$ avec: $v(t) = V_A - V_B$
 et $i(t) = + \frac{dq(t)}{dt}$ (i va du + vers le -)
~~soit~~ $i(t) = - \frac{dq(t)}{dt}$

* Cond. réel:



Ex. 5

fixons $i(t)$:

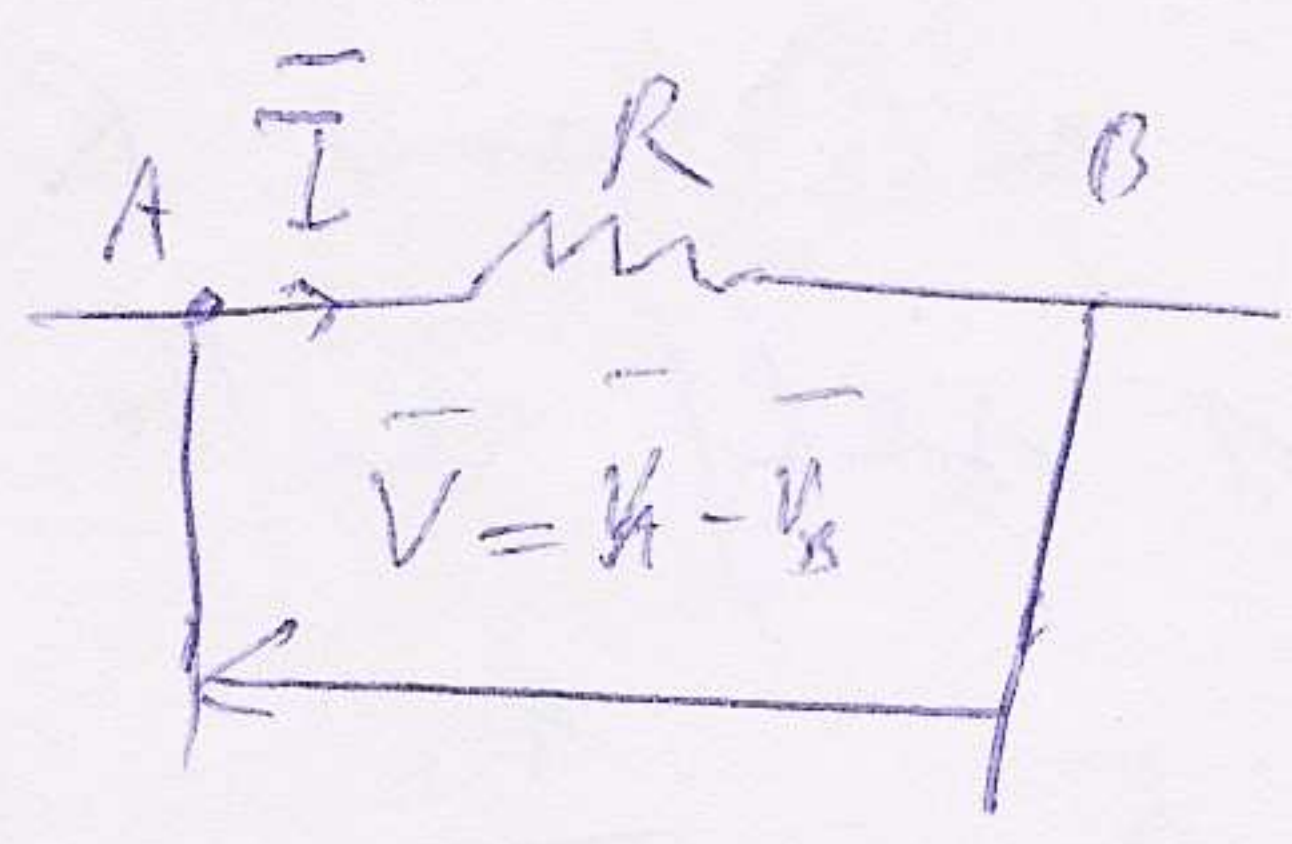
$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$
 $\tilde{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \tilde{I} e^{j\omega t}$

$i(t) = R_e \{ \tilde{i}(t) \}$

Expression de d.d.p en amplitude complexe:

* pour une résistance:

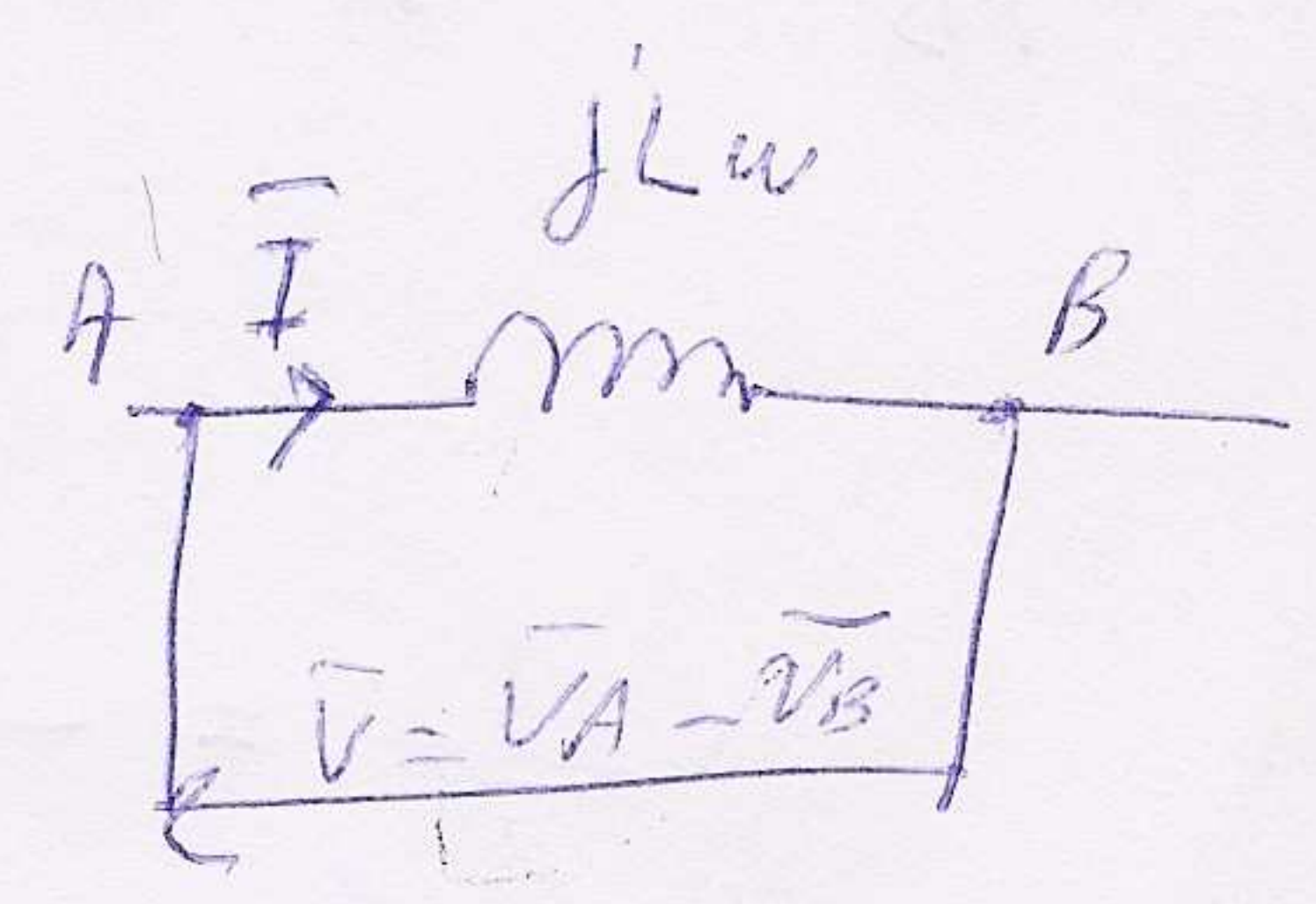
$v(t) = R \cdot i(t) \Rightarrow \tilde{v}(t) = R \cdot \tilde{i}(t)$
 $\Rightarrow \tilde{V} e^{j\omega t} = R \cdot \tilde{I} e^{j\omega t} \Rightarrow \boxed{\tilde{V} = R \tilde{I}}$



* Self: - parfaite:

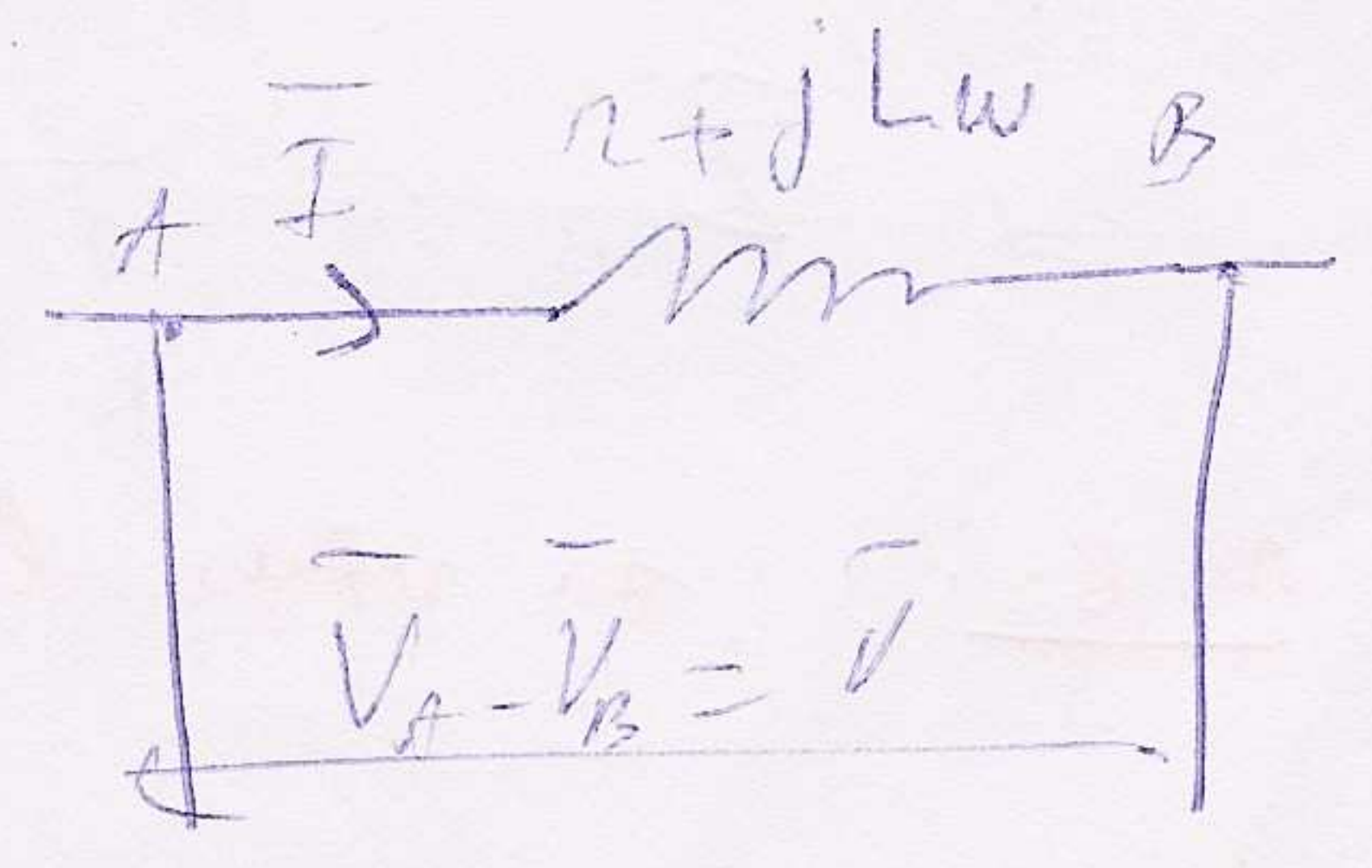
$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ $\tilde{V}(t) = L \frac{d\tilde{i}(t)}{dt}$
 $= \frac{L}{dt} (\tilde{I} e^{j\omega t})$
 $= L \tilde{I} \frac{d}{dt} (e^{j\omega t})$
 $\tilde{V}(t) = L j \omega \tilde{I} e^{j\omega t}$
 or $\tilde{V}(t) = \tilde{V} e^{j\omega t}$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{V} = j L \omega \tilde{I}}$



- réelle:

$\tilde{V}(t) = L \frac{d\tilde{i}(t)}{dt} + r \tilde{i}(t)$
 $\Rightarrow \boxed{\tilde{V} = j L \omega \tilde{I} + r \tilde{I}}$
 $\boxed{\tilde{V} = (j L \omega + r) \tilde{I}}$



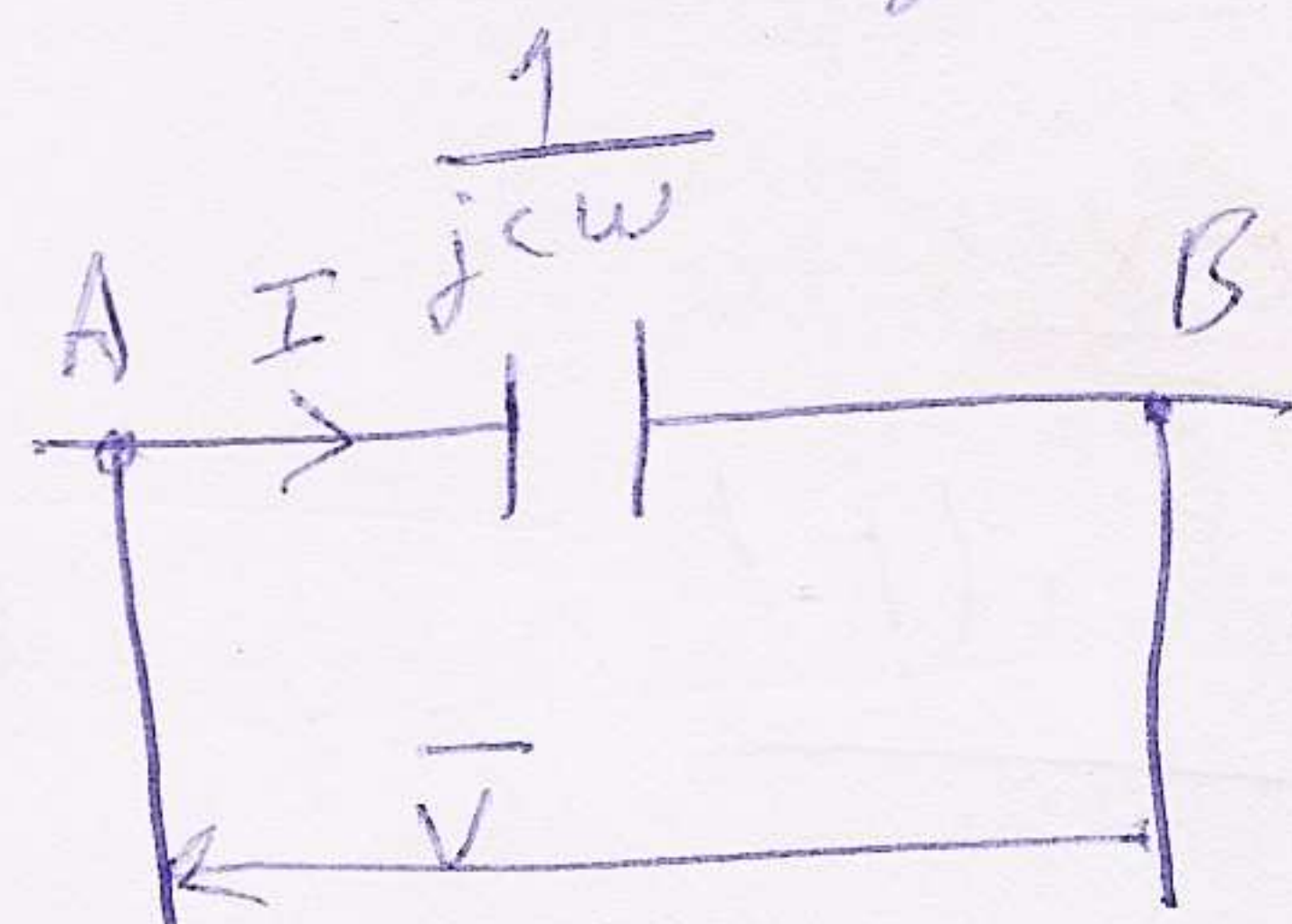
* Condens. parfait: $q(t) = C v(t)$ avec: $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{C} q(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$\Rightarrow \bar{v}(t) = \frac{1}{C} \int \bar{i}(t) dt$$

$$\text{Or } \bar{v} e^{j\omega t} = \frac{1}{C} \int \bar{I} e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega C} \bar{I} e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{V} = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}}$$



Résumé:

résistance:

$$\bar{V} = R \bar{I}$$

self réelle

$$\bar{V} = (j\omega L + r) \bar{I}$$

condensateur:

$$\bar{V} = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}$$

on constate que le rapport $\frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ est indépendant de $\bar{V}$ et $\bar{I}$

$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} \begin{cases} R \\ r + j\omega L \\ \frac{1}{j\omega C} \end{cases}$ on l'appelle ~~impédance~~ impédance complexe et on note: $\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$

pour 1 résistance $R = \bar{Z}_R = R$

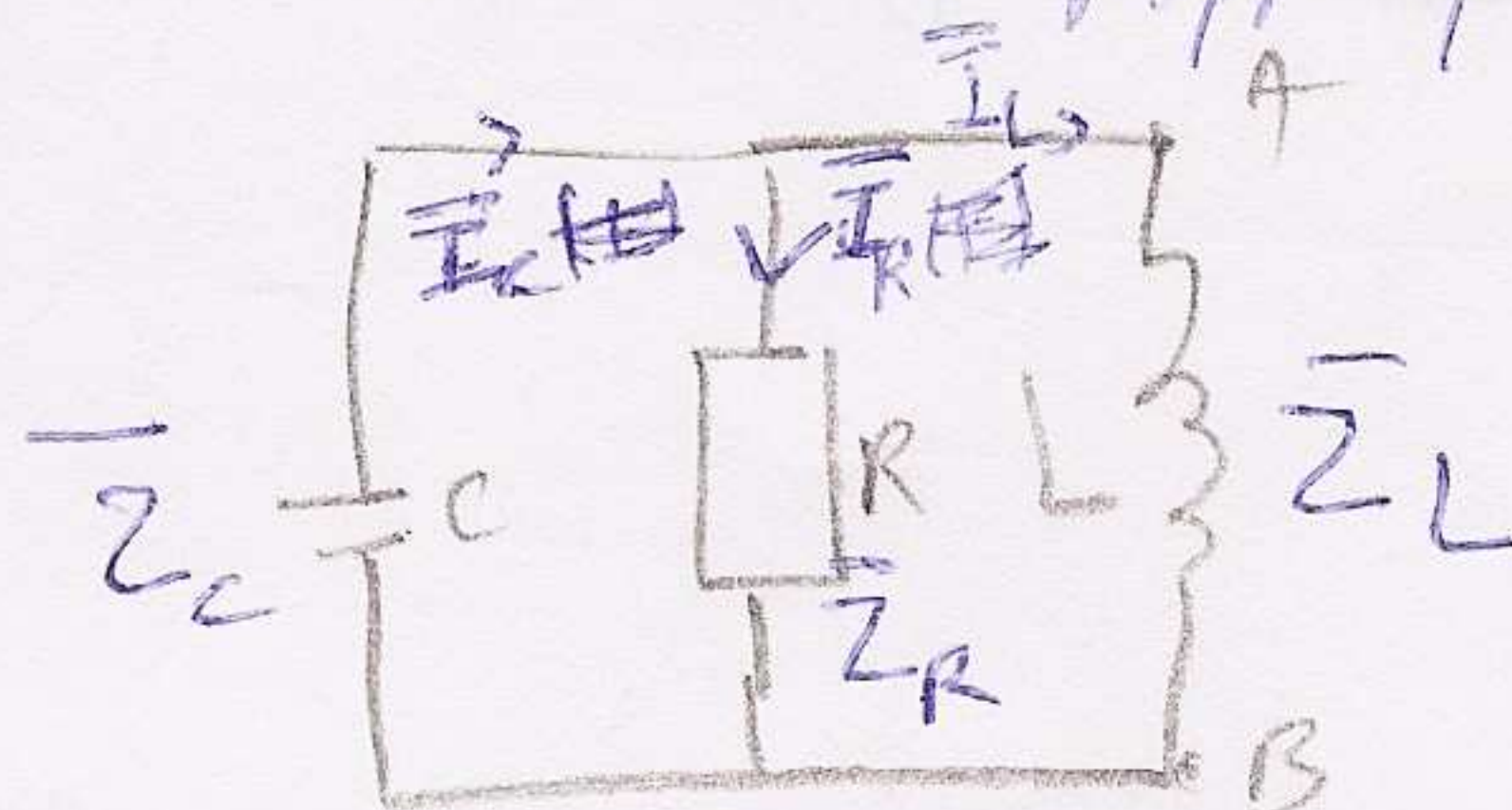
pour 1 self réelle (L, r) : $\bar{Z}_L = r + j\omega L$

pour 1 condens. parfait: $\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$

les règles de simplification série, ||, Th de Kennelly s'appliquent aux impédances

Ex 1

figure 1:



1° Déterminer l'impédance équivalente entre A et B:

$$\Rightarrow \bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_R \parallel \bar{Z}_L \parallel \bar{Z}_C$$

$$\frac{1}{\bar{Z}_{AB}} = \frac{1}{\bar{Z}_R} + \frac{1}{\bar{Z}_C} + \frac{1}{\bar{Z}_L}$$

$$\frac{1}{\bar{Z}_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{1/j\omega C} = \frac{1}{R} + j\omega C - \frac{j}{\omega L} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{Z}_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{L\omega}{\frac{L\omega}{R} + j(L\omega^2 - 1)}$$

n.b.: si vous laissez un j au dénominateur c'est $\odot$

$$= Lw \frac{\frac{Lw}{R} - j(Lw^2 - 1)}{\left(\frac{Lw}{R}\right)^2 + (Lw^2 - 1)^2}$$

2° Déterminer son module: $\bar{Z} = A + jB \Rightarrow |\bar{Z}| = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$|\bar{Z}_{AB}| = |\bar{Z}_{AB}| = \frac{Lw}{\left(\frac{Lw}{R}\right)^2 + (Lw^2 - 1)^2} \sqrt{\left(\frac{Lw}{R}\right)^2 + (Lw^2 - 1)^2}$$

$$|\bar{Z}_{AB}| = \frac{Lw}{\sqrt{\left(\frac{Lw}{R}\right)^2 + (Lw^2 - 1)^2}}$$

3° Argument: $\bar{Z} = A + jB$ si φ est l'argument
 $\tan \varphi = \frac{B}{A} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$

$$\Rightarrow \tan \varphi_{AB} = \frac{1 - Lw^2}{Lw/R}, \text{ on peut écrire alors :}$$

$$\bar{Z} = |\bar{Z}_{AB}| e^{j\varphi_{AB}}$$

exosup.com

4° Déterminer la nature du circuit équivalent.



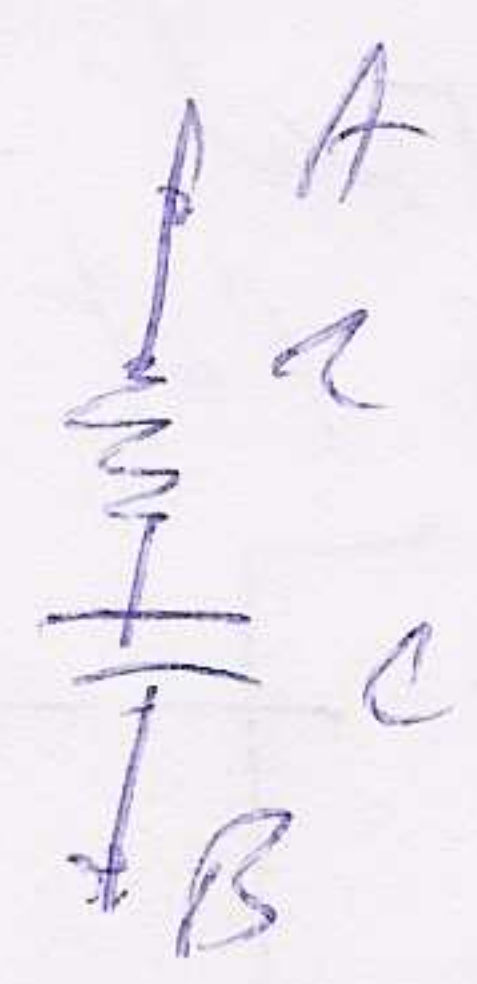
On peut écrire: $\bar{Z}_{AB} = \text{Re}(\bar{Z}_{AB}) + j \text{Im}(\bar{Z}_{AB})$
 c'est tjrs une résistance $\swarrow$ si $\text{Im} > 0$: self
 si $\text{Im} < 0$: condensateur

on pose: $\bar{Z}_{AB} = R + jX \rightarrow$ réactance

Le signe de X dépend du signe $1 - Lw^2$ or $1 - Lw^2 < 0$

Donc Z_{AB} est une résistance en série avec un condensateur.

Pour la figure 2 :



1° impédance équivalente $\bar{Z}_{AB}$:

$$\bar{Z}_{AB} = (\bar{Z}_L + \bar{Z}_R // \bar{Z}_C) = jL\omega + \frac{R \cdot \frac{1}{Cj\omega}}{R + \frac{1}{Cj\omega}} = jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega} = jL\omega + R \cdot \frac{1 - jRC\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}$$

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{R}{1 + R^2C^2\omega^2} + j \left(L\omega - \frac{RC\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} \right) = \frac{Cj\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} R \left[1 + j \left(\frac{L\omega}{R} (1 + R^2C^2\omega^2) - RC\omega \right) \right]$$

2° Calculer le module $Z_{AB} = |\bar{Z}_{AB}|$ $\bar{Z}_{AB} = \frac{R}{1 + R^2C^2\omega^2} \left[1 + j \left(\frac{L\omega}{R} + LRC^2\omega^3 - RC\omega \right) \right]$

$$Z_{AB} = \frac{R}{1 + R^2C^2\omega^2} \sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R} + LRC^2\omega^3 - RC\omega \right)^2}$$

3° phase:

$$\varphi = \text{Arg } \bar{Z}_{AB}$$

avec

$$\text{tg } \varphi = \frac{L\omega}{R} + LRC^2\omega^3 - RC\omega$$

4° Remplacer le circuit par des élmts passifs branchés en série:

$$\bar{Z}_{AB} = \text{Re}(\bar{Z}_{AB}) + j \text{Im}(\bar{Z}_{AB})$$

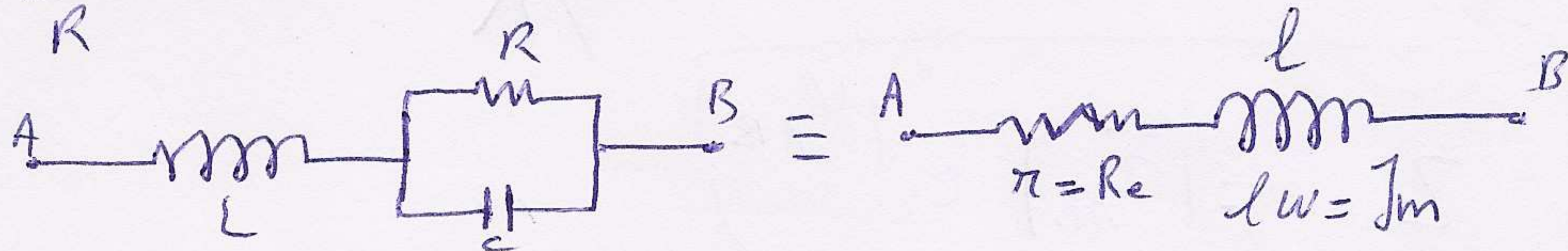
$\text{Re}(\bar{Z}_{AB}) = \text{résistance}$; $\text{Im}(\bar{Z}_{AB}) > 0$ c'est une self.

$\text{Im}(\bar{Z}_{AB}) < 0$ c'est un condensateur.

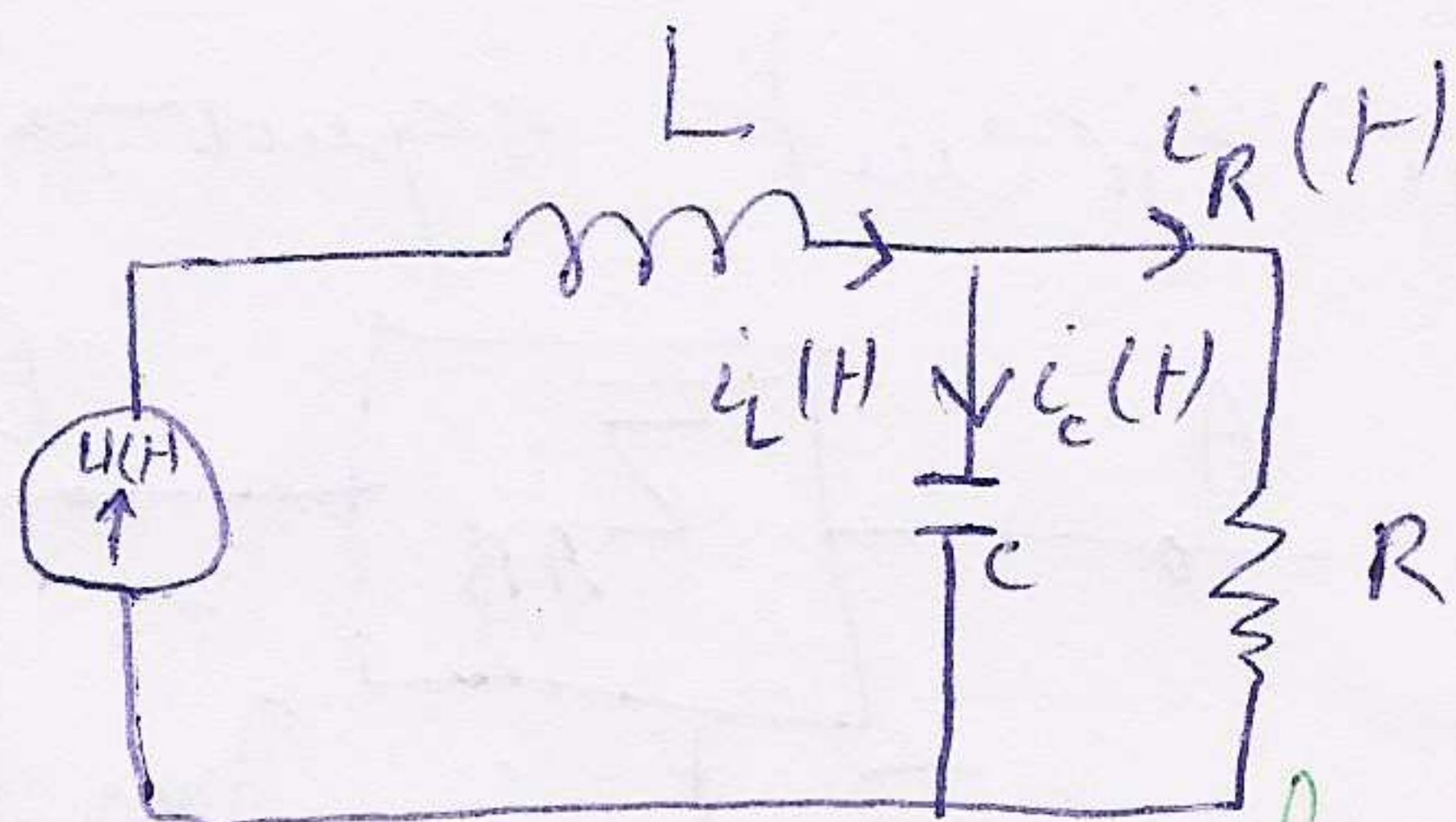
font calcul fait, $\text{Im}(\bar{Z}_{AB}) > 0$

$$\text{A.N.: } \frac{L\omega}{R} + LRC^2\omega^3 - RC\omega > 0$$

Conclusion:



Ex 2:



avec $u(t)$ connu

$$u(t) = U_m \cos(\omega t)$$

(application)

1° RAPPEL: Th. de Thevenin (méthode)

Rmq: Les seules lois générales en électrocinétique sont les lois de Kirchhoff. Les autres théorèmes sont là pour faciliter le travail dans certains cas. En particulier les lois de Kirchhoff entraînent des calculs très compliqués lorsque le nb. d'équations est > 3 . Lorsqu'on recherche à calculer qu'un seul crt, on applique le th de Thevenin (ou le th. de Norton)

Énoncé du th de Thevenin: Tout circuit aussi compliqué soit-il, est équivalent (vu entre 2 pts p et q) à un générateur

Reseau qq constitué de: L, R, C, V, e, e

$\equiv$

Reseau qq moins la branche considérée

$\equiv$

Le courant $\bar{I}$ est tiré de l'ens

branchée

Thévenin

$\equiv$

$\bar{E}_{Th}$

$\bar{V}$

$\bar{I}$

branchée

$\bar{I}$

$\bar{I}$

Alors : $\bar{V} = (\bar{V}_p - \bar{V}_Q)_{\text{charge}}$

en charge: $\Rightarrow$ La branche ^{TD3} existe

$$\bar{V} = (\bar{V}_p - \bar{V}_Q)_{Q_n} = \bar{\mathcal{E}}_{Th} - \bar{Z}_{Th} \cdot \bar{I}$$

$\bar{\mathcal{E}}_{Th}$? $\bar{\mathcal{E}}_{Th}$ est une cte, en la calcule pour $\bar{I} = 0$

$$\bar{V}_{\bar{I}=0} = (\bar{V}_p - \bar{V}_Q)_{\bar{I}=0} = \bar{\mathcal{E}}_{Th} \quad (\bar{I}=0 \text{ en dit-à vide})$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{Th} = (\bar{V}_p - \bar{V}_Q)_{\text{vide}} \quad (\text{il n'y a pas du crt})$$

Pour le réaliser on coupe la branche entière entre P et Q

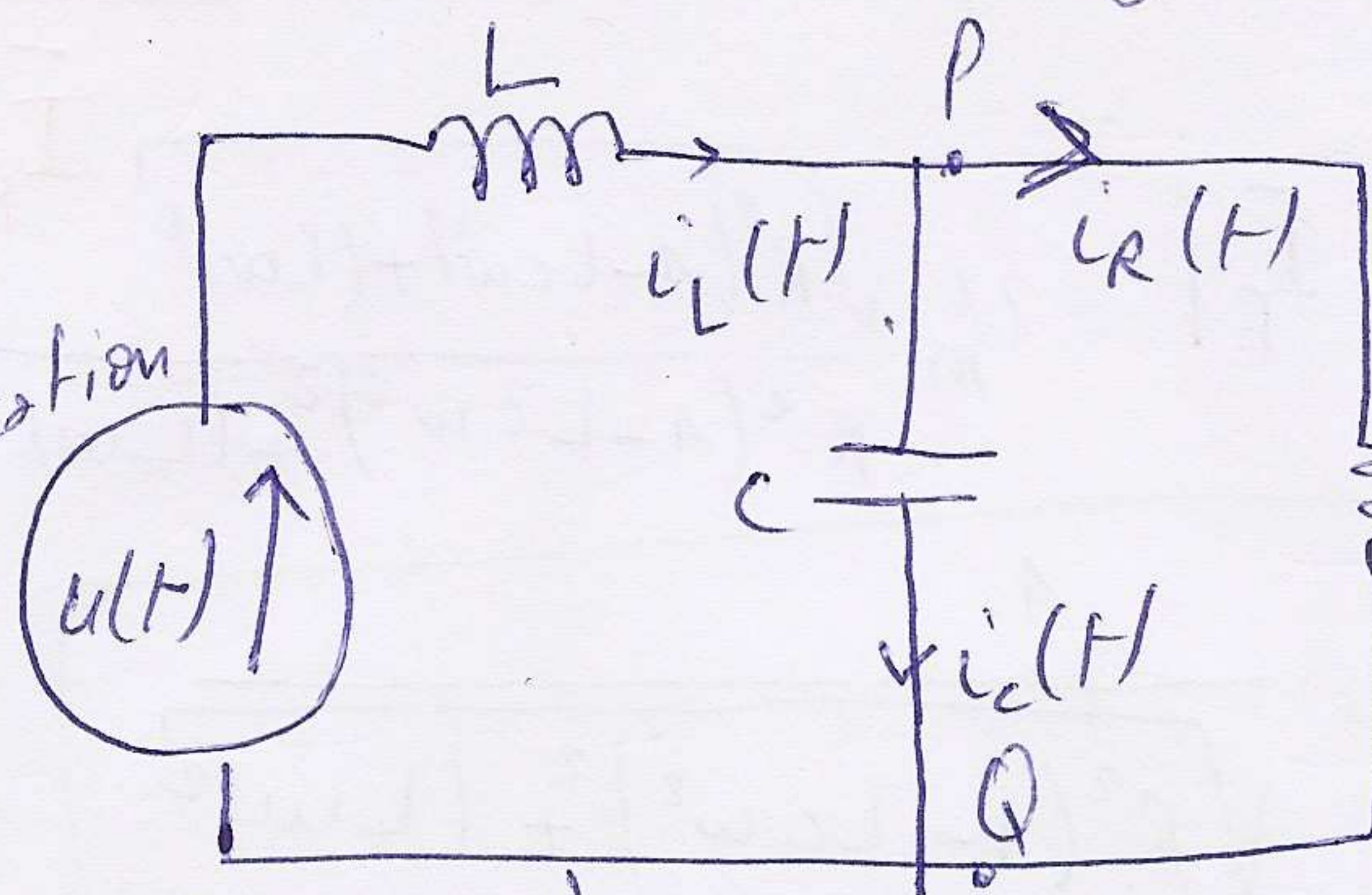
$$\text{Finalement : } \bar{V} = (\bar{V}_p - \bar{V}_Q)_{ch} = (\bar{V}_p - \bar{V}_Q)_{\text{vide}} - \bar{Z}_{Th} \cdot \bar{I}$$

* pour calculer $(\bar{V}_p - \bar{V}_Q)_{\text{vide}}$, on coupe la branche entière et on doit utiliser les simplifications jusqu'à ne garder qu'une seule maille (voir 2).

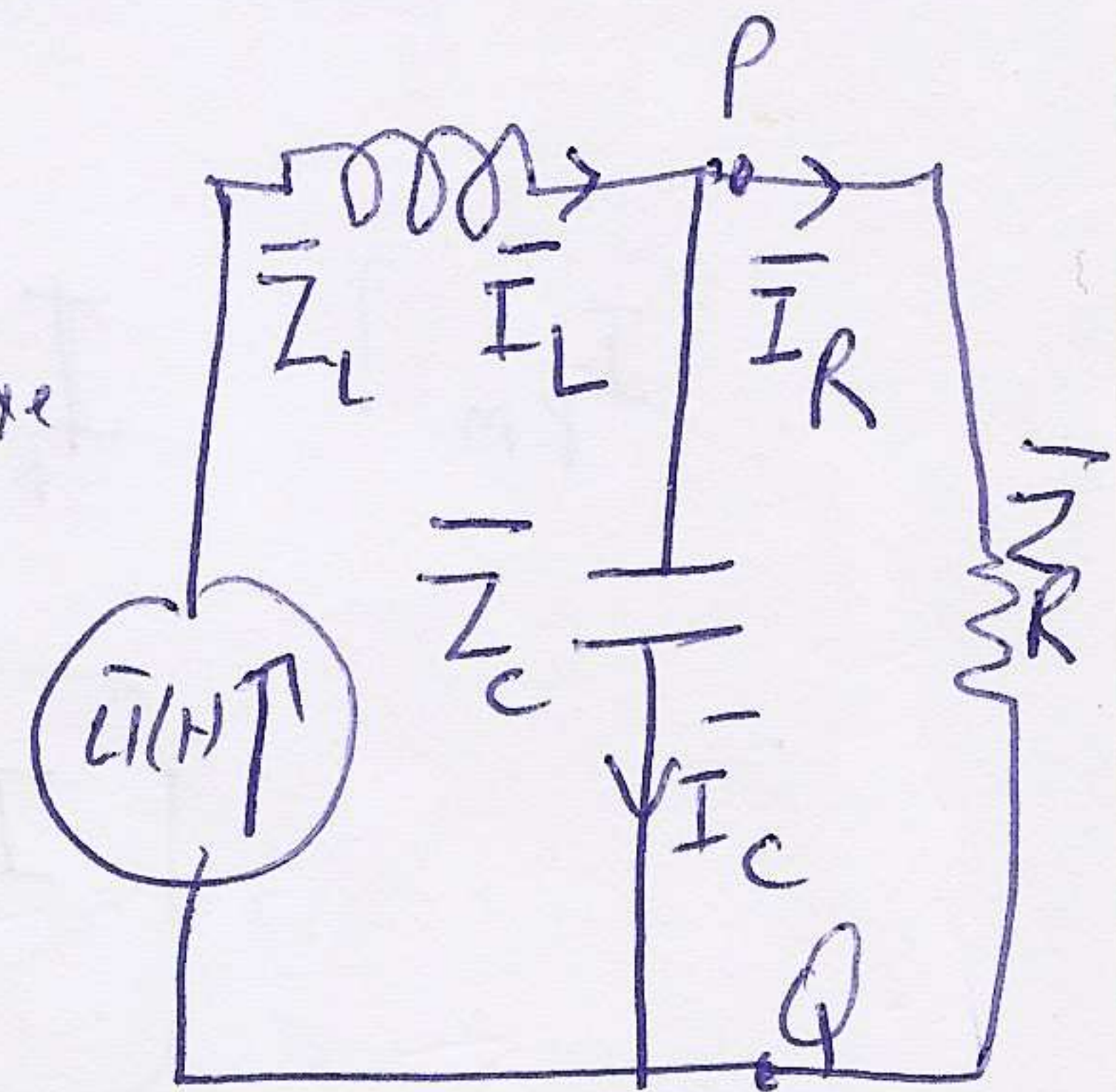
* Pour calculer $\bar{Z}_{Th}$ (impédance équivalente au réseau entre les points P et Q). En court-circuit, tout les générateurs et linéarisé le réseau entre P et Q.

Exercice :

1/ Calculer $\bar{I}_R$ par application du th. de Thevenin.



en complexe

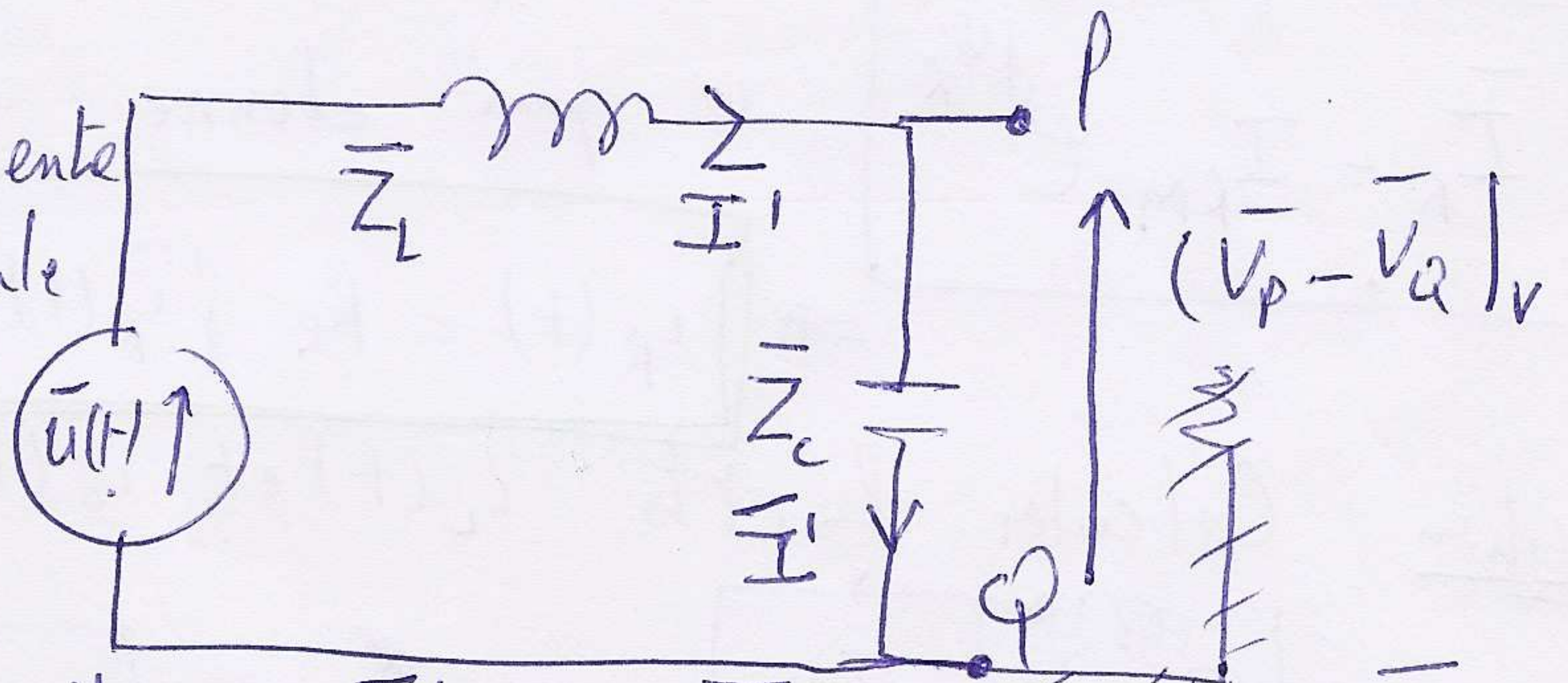


$$* \text{ Calcul de } \bar{V} = (\bar{V}_p - \bar{V}_Q)_{ch} = \bar{Z}_R \cdot \bar{I}_R = R \bar{I}_R$$

$$* \text{ Calcul de } (\bar{V}_p - \bar{V}_Q)_{\text{vide}}$$

On coupe la branche considérée entre P et Q. soit $\bar{I}'$ le crt qui circule dans la maille qui reste

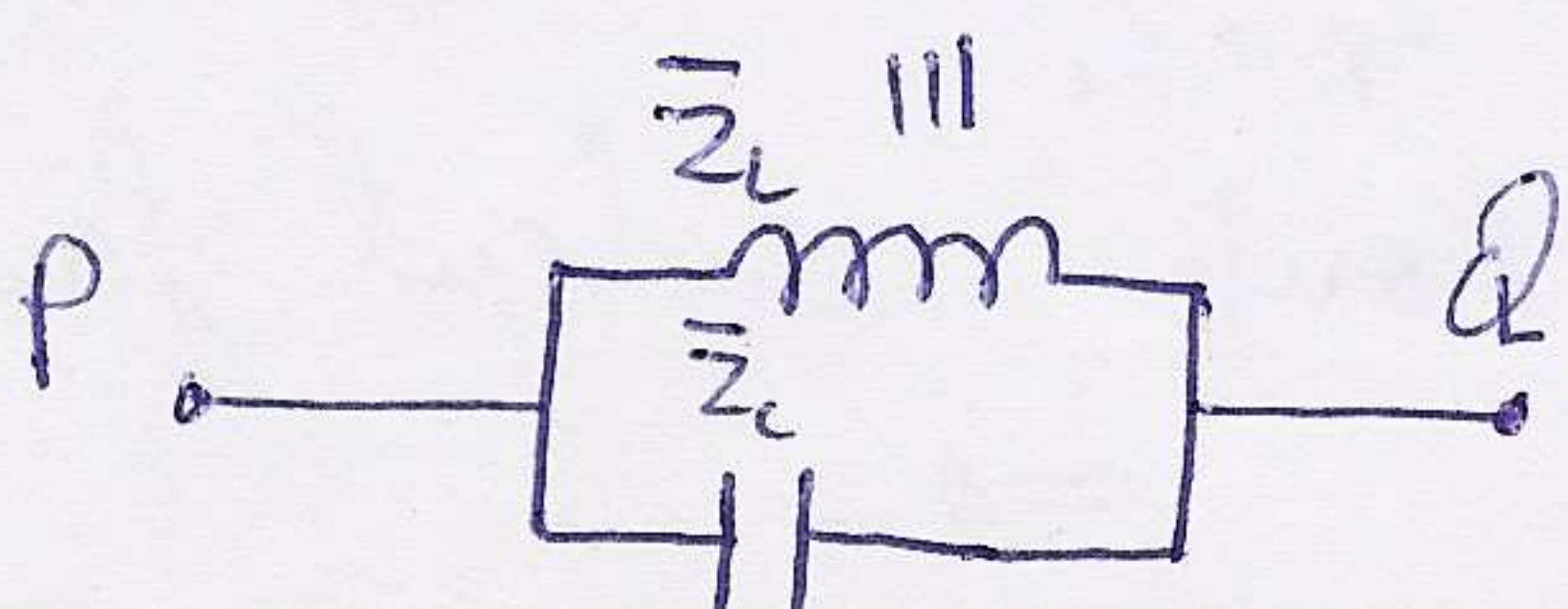
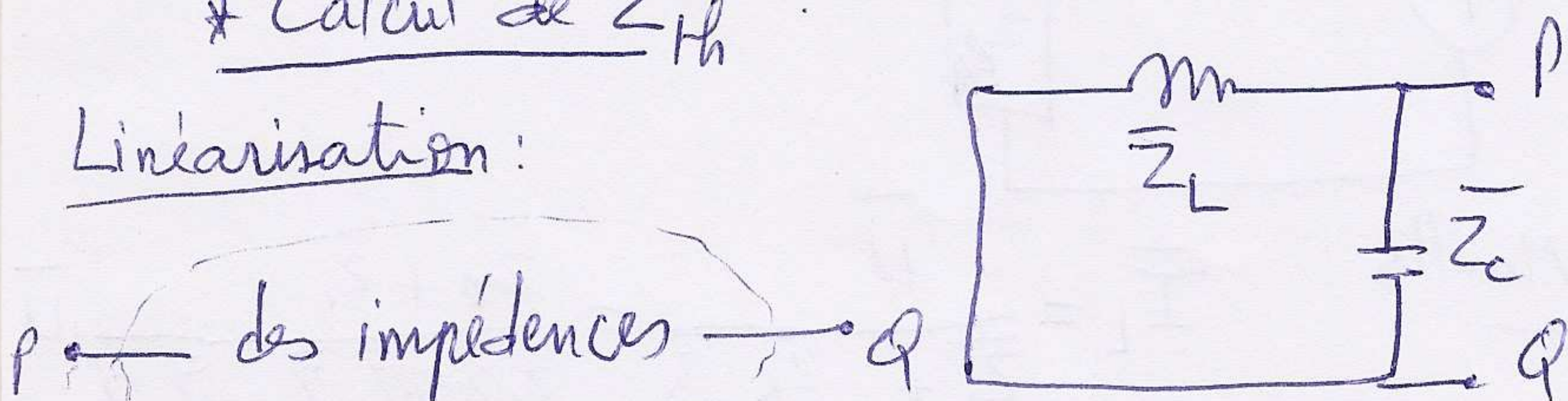
$$(\bar{V}_p - \bar{V}_Q) = + \bar{Z}_c \cdot \bar{I}'$$



$$\text{en appliquant une loi des mailles : } \bar{I}' = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_c} \Rightarrow (\bar{V}_p - \bar{V}_Q)_{\text{vide}} = \bar{Z}_c \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_c}$$

$$* \text{ Calcul de } \bar{Z}_{Th}$$

Linearisation :



$$\bar{Z}_{Th} = \bar{Z}_L \parallel \bar{Z}_c = \frac{\bar{Z}_c \bar{Z}_L}{\bar{Z}_c + \bar{Z}_L}$$

* Application du th de Thevenin: $(\bar{V}_p - \bar{V}_q)_{ch} = (\bar{V}_p - \bar{V}_q)_{vide} - \bar{Z}_{th} \bar{I}_R$

$$\Rightarrow R \bar{I}_R = \frac{\bar{Z}_c}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_c} \bar{U} - \frac{\bar{Z}_L \cdot \bar{Z}_c}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_c} \bar{I}_R$$

$$\Rightarrow \bar{I}_R \left(R + \frac{\bar{Z}_L \cdot \bar{Z}_c}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_c} \right) = \frac{\bar{Z}_c}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_c} \bar{U}$$

$$\Rightarrow \bar{I}_R = \frac{\bar{Z}_c / (\bar{Z}_L + \bar{Z}_c)}{R + \bar{Z}_L \cdot \bar{Z}_c / (\bar{Z}_L + \bar{Z}_c)} \cdot \bar{U} = \frac{\bar{Z}_c}{R(\bar{Z}_L + \bar{Z}_c) + \bar{Z}_L \cdot \bar{Z}_c} \bar{U}$$

en reportant les valeurs, $u(t) = U_m \cos(\omega t) \Rightarrow \bar{U} = U_m e^{j\varphi=0} = U_m$

$$\Rightarrow \bar{I}_R = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) + j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}} U_m$$

tout calcul fait on trouve:

$$\bar{I}_R = U_m \cdot \frac{R(1 - L\omega^2) - jL\omega}{R^2(1 - L\omega^2)^2 + (L\omega)^2}$$

$\bar{I}_{RM}$?

$$\bar{I}_{RM} = U_m |\bar{I}_R| = U_m \cdot \frac{\sqrt{R^2(1 - L\omega^2)^2 + (L\omega)^2}}{R^2(1 - L\omega^2)^2 + (L\omega)^2}$$

$$\bar{I}_R = I_{RM} e^{j\varphi_R}$$

$$I_{RM} = U_m \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2(1 - L\omega^2)^2 + (L\omega)^2}}$$

φ ?

$$\varphi_R = \text{Arg}(\bar{I}_R) \text{ avec } \tan \varphi_R = \frac{L\omega}{(L\omega^2 - 1)R}$$

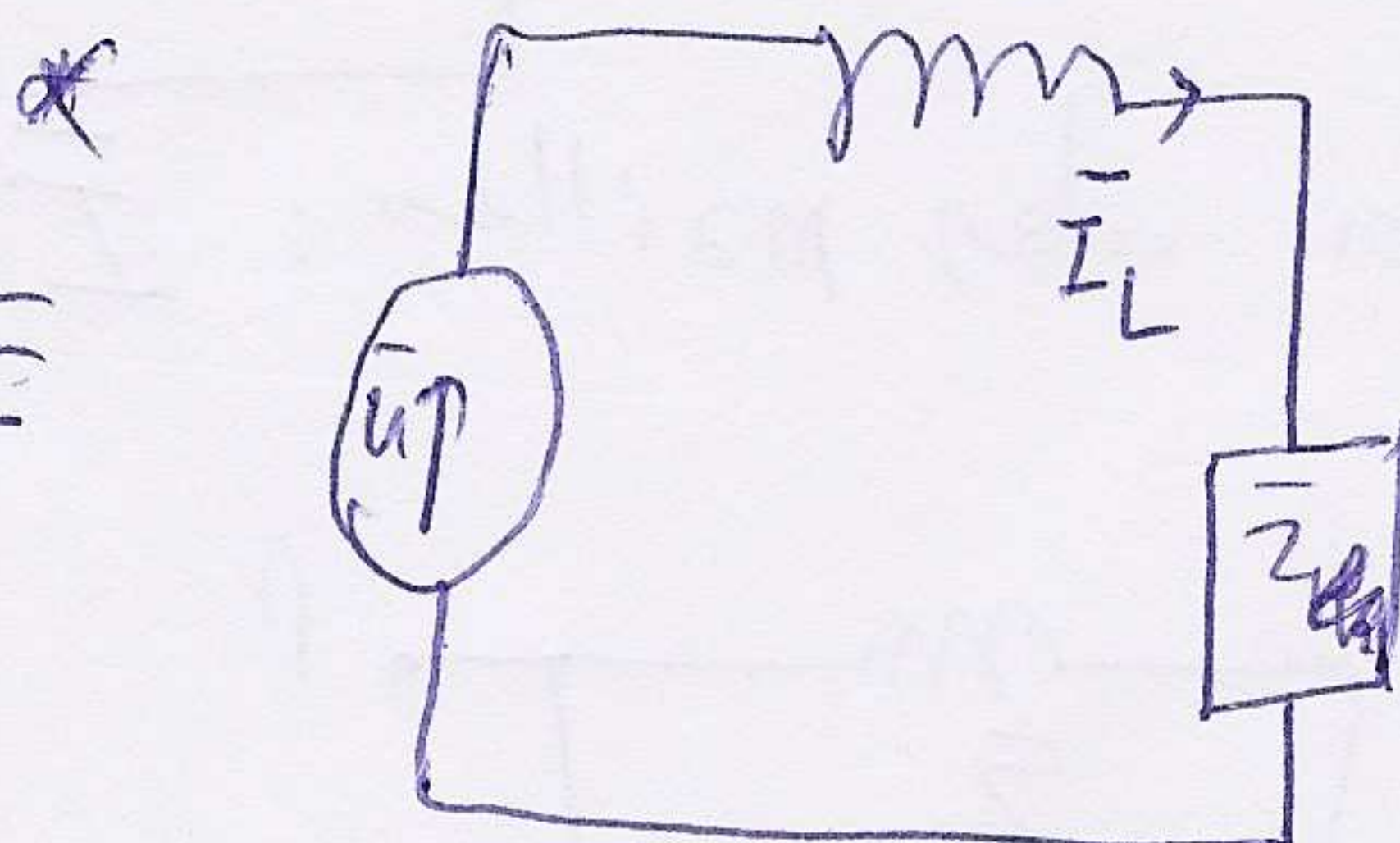
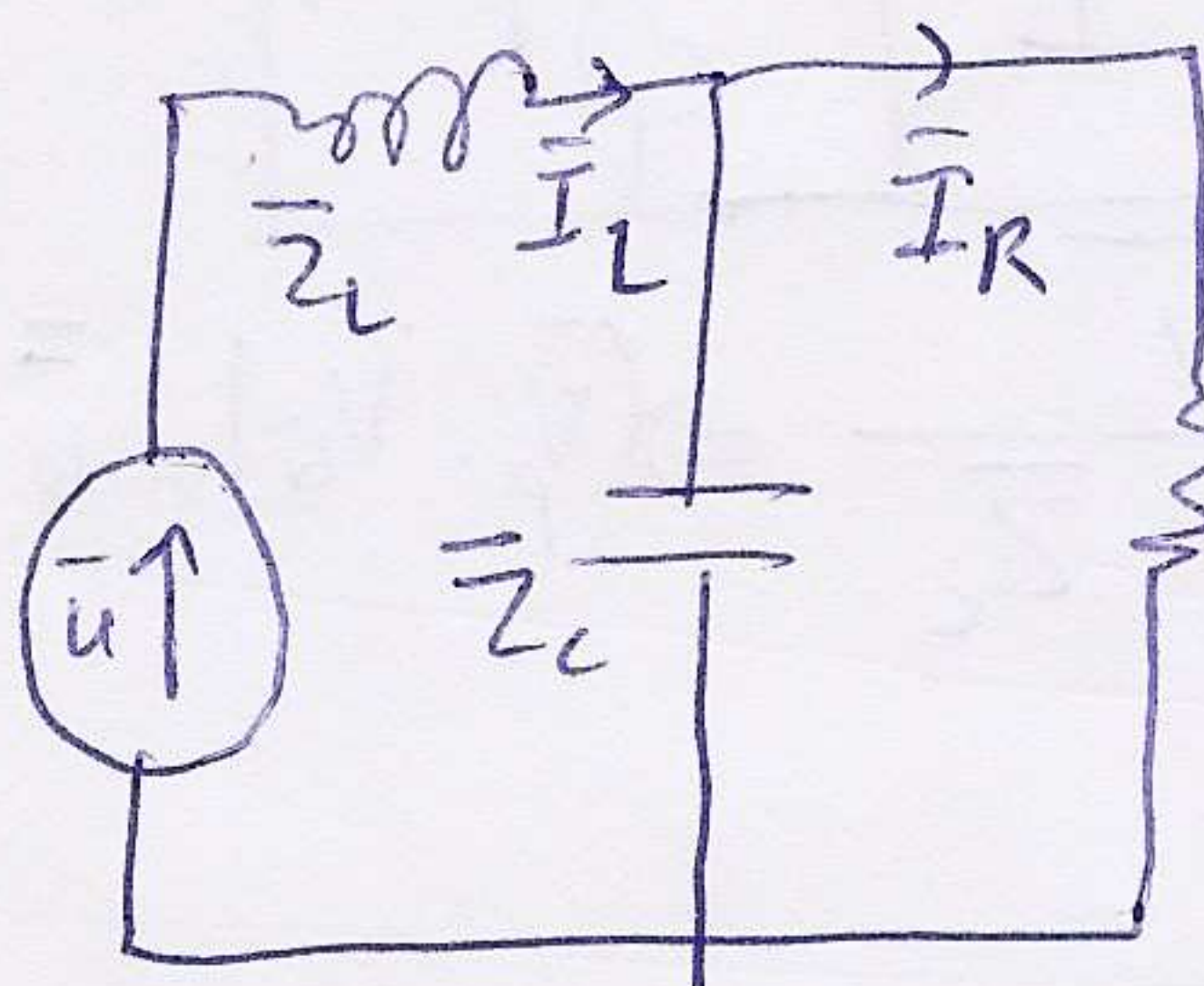
$$\bar{I}_R = I_{RM} e^{j\varphi_R}$$

$$u \text{ qui donne } \bar{i}_R(t) = \bar{I}_R e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow i_R(t) = \text{Re} \{ \bar{i}_R(t) \} = I_{RM} \cos(\omega t + \varphi_R)$$

2^{ème} question

Calculer les crbs $i_L(t)$ et $i_C(t)$:



$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_C \parallel \bar{Z}_R$$

* Calcul de $i_L(t)$:

loi des Mailles:

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_L + \frac{\bar{Z}_R \cdot \bar{Z}_C}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_C}} = \frac{\bar{Z}_R + \bar{Z}_C}{\bar{Z}_R \bar{Z}_L + \bar{Z}_R \bar{Z}_C + \bar{Z}_L \bar{Z}_C} \bar{U}$$

en reportant les valeurs:

$$\bar{I}_L = \frac{R + \frac{1}{j\omega C}}{jR(L\omega - \frac{1}{\omega C}) + \frac{jL\omega}{j\omega C}} \bar{U}$$

tout calcul fait

$$\bar{I}_L = U_M \cdot \frac{\frac{R}{1+R^2C^2\omega^2} - j \left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{1+R^2C^2\omega^2} \right)}{\left(\frac{R}{1+R^2C^2\omega^2} \right)^2 + \left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{1+R^2C^2\omega^2} \right)^2}$$

$$\bar{I}_L = I_{LM} e^{j\varphi_L} \quad \text{avec} \quad I_{LM} = \frac{U_M}{\sqrt{\left(\frac{R}{1+R^2C^2\omega^2} \right)^2 + \left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{1+R^2C^2\omega^2} \right)^2}}$$

$$\text{et } \varphi_L = \text{Arg } \bar{I}_L \quad \text{avec} \quad \tan \varphi_L = \frac{\frac{R^2C\omega}{1+R^2C^2\omega^2} - L\omega}{R / (1+R^2C^2\omega^2)} = RC\omega - \frac{L\omega}{R(1+R^2C^2\omega^2)}$$

On en déduit:

$$\bar{I}_L = I_{LM} e^{j\varphi_L} \Rightarrow i_L(t) = \bar{I}_L e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \boxed{i_L(t) = \text{Re}\{\bar{I}_L e^{j\omega t}\} = I_{LM} \cos(\omega t + \varphi_L)}$$

* Calcul de $i_c(t)$:

* loi des mailles:

$$\bar{I}_L = \bar{I}_R + \bar{I}_C \Rightarrow \bar{I}_C = \bar{I}_L - \bar{I}_R$$

Ce qui donne:

$$\bar{I}_C = U_M \cdot \frac{\bar{Z}_R}{\bar{Z}_R \cdot \bar{Z}_L + \bar{Z}_R \cdot \bar{Z}_C + \bar{Z}_L \cdot \bar{Z}_C}$$

faire les calculs à la maison

3^{ème} question: bilan de puissance:

Pour une impédance $\bar{Z} = A + jB = \text{Re}(\bar{Z}) + j\text{Im}(\bar{Z})$

$$P_a = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{Z}) \cdot I_M^2 \quad ; \quad I_M: \text{crt qui traverse } \bar{Z}$$

$$P_r = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{Z}) \cdot I_M^2$$

* Puissance active:

- Pour la résistance:

$$P_{aR} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{Z}_R) \cdot I_{RM}^2 = \frac{1}{2} R I_{RM}^2$$

(calcul photocopie)

Pour la self: $\bar{Z}_L = jL\omega \Rightarrow \text{Re}(\bar{Z}_L) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{aL} = 0}$

Pour le condensateur: $\bar{Z}_C = \frac{-j}{C\omega} \Rightarrow \text{Re}(\bar{Z}_C) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{aC} = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{P_{a\text{total}} = P_{aR}}$$

* Puissance réactive:

- Pour la résistance:

$$\bar{Z}_R = R \Rightarrow \text{Im}(\bar{Z}_R) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{rR} = 0}$$

- Pour la self:

$$\bar{Z}_L = jL\omega \Rightarrow \text{Im}(\bar{Z}_L) = L\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{rL} = \frac{1}{2} L\omega I_{ML}^2}$$

- Pour le condensateur:

$$\bar{Z}_C = \frac{-j}{C\omega} \Rightarrow \text{Im}(\bar{Z}_C) = \frac{-1}{C\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{rC} = \frac{1}{2} \frac{1}{C\omega} \cdot I_{CM}^2}$$

$$P_{\text{total}} = P_L + P_c$$

Verification du Th. de Boucherot :

Circuit équivalent :

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_L + \frac{\bar{Z}_R \cdot \bar{Z}_c}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_c}$$

A' écrire sous la forme

$$\bar{Z}_{eq} = \text{Re}(\bar{Z}_{eq}) + j \text{Im}(\bar{Z}_{eq})$$

$$\Rightarrow P_{L3} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{Z}_{eq}) \cdot I_{LM}^2$$

" (à vérifier)
P_{total}

$$\text{et } P_{R3} = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{Z}_{eq}) \cdot I_{LM}^2$$

" (à vérifier)
P_{total}



Ex 3

TD3 (7)

1° on connaît $i(t) = I_M \cos(\omega t)$ comme référence des phases
 $\Rightarrow \bar{I} = I_M e^{j0} = I_M$

or $\bar{V}_1 = \bar{V}_B - \bar{V}_D = \bar{Z}_C \bar{I}_C + \bar{Z}_L \bar{I}_L = (\bar{Z}_C + \bar{Z}_L) \cdot \bar{I}$

Alors $\bar{V}_1 = \frac{\bar{Z}_C \bar{Z}_L}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_L} \cdot \bar{I} = \frac{1/j\omega \cdot Lj\omega}{\frac{1}{j\omega} + jL\omega} I_M = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} I_M$

$\bar{V}_1 = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} I_M$ que l'on écrit sous la forme: $\bar{V}_1 = V_{1M} e^{j\varphi_1}$
 $V_{1M} = |\bar{V}_1| = \frac{L\omega}{|1 - LC\omega^2|} I_M$

$\varphi_1 = \text{Arg}(\bar{V}_1) =$ si $1 - LC\omega^2 > 0 \Rightarrow \varphi_1 = +\frac{\pi}{2}$
 si $1 - LC\omega^2 < 0 \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \bar{V}_1 = \frac{L\omega}{|1 - LC\omega^2|} I_M e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$

on en déduit $\bar{V}_1(t) = \bar{V}_1 e^{j\omega t} = \frac{L\omega}{|1 - LC\omega^2|} I_M e^{\pm j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t}$

finalemment: $V_1(t) = \text{Re} \{ \bar{V}_1(t) \} = \frac{L\omega}{|1 - LC\omega^2|} I_M \cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2})$

2) Calculer $i_L(t)$ et $i_C(t)$:

1° calcul de $i_L(t)$ on a: $\bar{I}_L = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_L} \Rightarrow \bar{I}_L = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} I_M \cdot \frac{1}{jL\omega}$

Donc $\bar{I}_L = \frac{I_M}{1 - LC\omega^2}$ à mettre sous la forme $\bar{I}_L = I_{LM} e^{j\varphi_L}$

avec $I_{LM} = |\bar{I}_L| = \frac{I_M}{|1 - LC\omega^2|}$ et $\varphi_L = \arg(\bar{I}_L) = \arg\left(\frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_L}\right)$
 $= \arg(\bar{V}_1) - \arg(\bar{Z}_L) = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$

Donc: si $1 - LC\omega^2 > 0 \Rightarrow \varphi_1 = +\frac{\pi}{2} : \varphi_L = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

si $1 - LC\omega^2 < 0 \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} : \varphi_L = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$

$\bar{I}_L = \frac{I_M}{|1 - LC\omega^2|} e^{j(\frac{\varphi_L}{\omega})} = \pm \frac{I_M}{|1 - LC\omega^2|}$ (car: $e = 1$ et $e^{-j\pi} = -1$)

on en déduit $\bar{i}_L(t) = \bar{I}_L e^{j\omega t} = \pm \frac{I_M}{|1 - LC\omega^2|} e^{j\omega t}$

finalemment $i_L = \text{Re} \{ \bar{i}_L(t) \} = \pm \frac{I_M}{|1 - LC\omega^2|} \cos(\omega t)$

2-2) Calculer de $\bar{i}_c(t)$:

$$\bar{V}_1 = \bar{Z}_c \bar{I}_c$$

$$\Rightarrow \bar{I}_c = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_c} = \frac{jL\omega}{1-L\omega^2} I_M \frac{1}{1/j\omega} = - \frac{L\omega^2}{1-L\omega^2} I_M$$

$$\boxed{\bar{I}_c = - \frac{L\omega^2}{1-L\omega^2} I_M}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\bar{I}_c = I_{cm} e^{j\varphi_c}$$

$$\text{avec : } I_{cm} = |\bar{I}_c| = \frac{L\omega^2}{|1-L\omega^2|} I_M$$

$$\text{et } \varphi_c = \text{Arg } \bar{I}_c = \text{Arg} \left| \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_c} \right| = \text{Arg } \bar{V}_1 - \text{Arg } \bar{Z}_c = \varphi_1 - (-\frac{\pi}{2})$$

$$\text{si } 1-L\omega^2 > 0 : \varphi_1 = +\frac{\pi}{2} : \varphi_c = \pi$$

$$\text{si } 1-L\omega^2 < 0 : \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} : \varphi_c = 0$$

$$\text{donc } \bar{I}_c = \frac{L\omega^2}{|1-L\omega^2|} I_M e^{j(\frac{0\pi}{\pi})} = \pm \frac{L\omega^2}{|1-L\omega^2|} I_M$$

$$\bar{i}_c(t) = \bar{I}_c e^{j\omega t} = \pm \frac{L\omega^2}{|1-L\omega^2|} e^{j\omega t} \cdot I_M$$

$$\boxed{i_c(t) = \text{Re}(\bar{i}_c(t)) = \pm \frac{L\omega^2}{|1-L\omega^2|} I_M \cos(\omega t)}$$

3) Calculer le déphasage entre $V(t)$ et $i(t)$:

$$\text{Du schéma montage on tire : } \bar{V} = \bar{Z}_{eq} \cdot \bar{I} = \bar{Z}_{AD} \cdot \bar{I}$$

$$(\text{Donc } |\bar{I}| \neq |\bar{V}|) \text{ or } \arg \bar{V} = \arg(\bar{Z}_{AD} \cdot \bar{I}) = \arg(\bar{Z}_{AD}) + \arg(\bar{I})$$

$$= \arg(\bar{Z}_{AD})$$

* Calcul de $\bar{Z}_{AD}$:

$$\bar{Z}_{AD} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_c \parallel \bar{Z}_L = R + \frac{\frac{1}{j\omega} \cdot jL\omega}{\frac{1}{j\omega} + jL\omega} = R + \frac{jL\omega}{1-L\omega^2}$$

$$\arg(\bar{Z}_{AD}) = \varphi_{AD} \text{ avec } \tan \varphi_{AD} = \frac{L\omega}{R(1-L\omega^2)}$$

$$\text{et si on pose } \arg \bar{V} = \varphi : \varphi = \varphi_{AD}$$

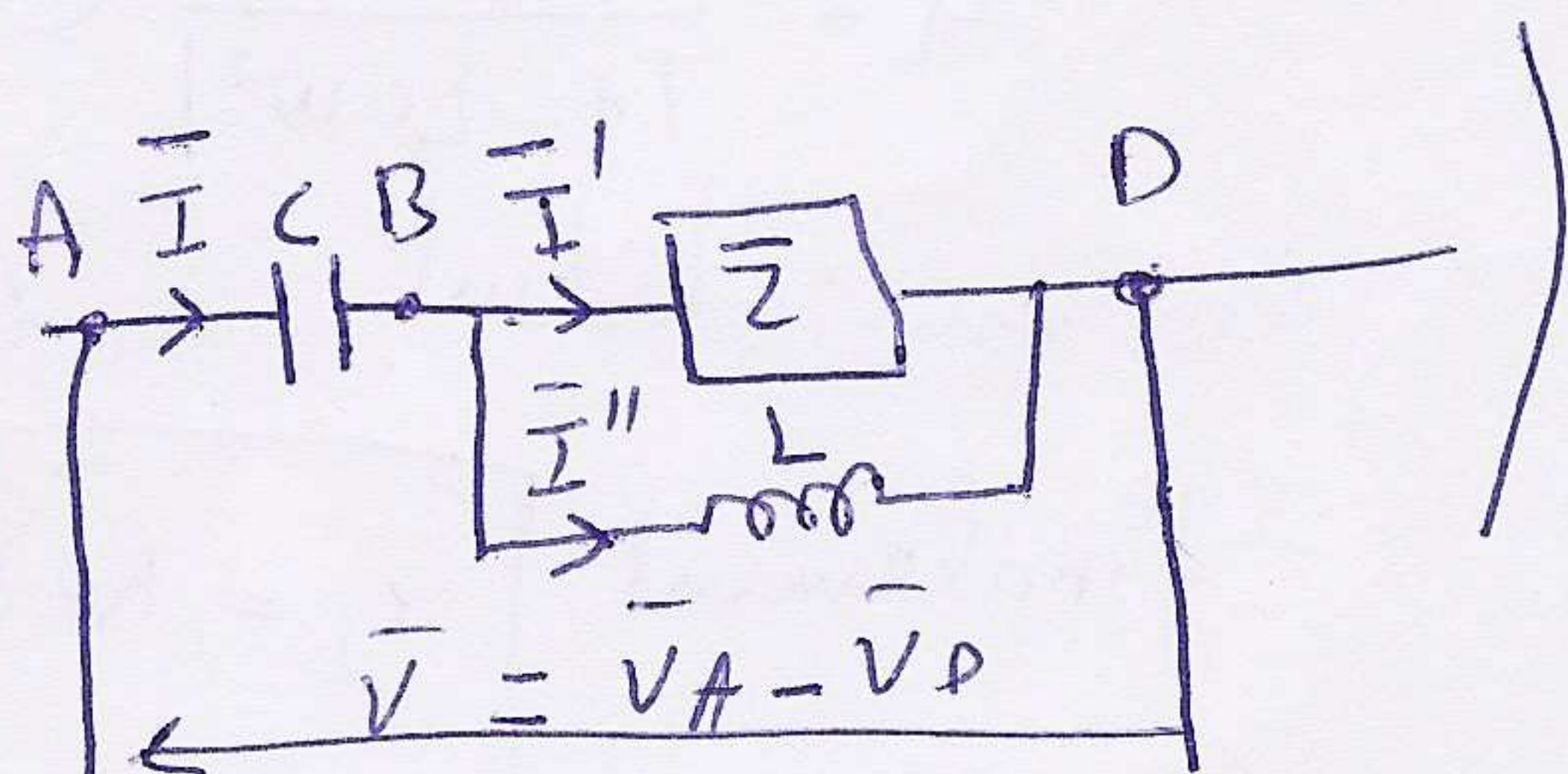
$$\text{on peut continuer } \bar{V} = V_M e^{j\varphi}$$

Exercice 4:

(Corrigé L'erreur:

10/ a Quelle condition l'intensité $\bar{I}'$ est indépendante de $\bar{Z}$

Calculons $\bar{I}'$: Pour cela calculons $\bar{V}_B - \bar{V}_D$:



on connaît $\bar{V}$

TD3 (8)

$$\bar{V}_B - \bar{V}_D = \bar{Z} \cdot \bar{I}' + \bar{Z}_L \cdot \bar{I}'' = (\bar{Z} \parallel \bar{Z}_L) \cdot \bar{I}$$

$$\text{or } \bar{V} = \bar{V}_A - \bar{V}_D = \bar{Z}_{eq} \cdot \bar{I} = \bar{Z}_{AD} \cdot \bar{I} = (\bar{Z}_C + \bar{Z} \parallel \bar{Z}_L) \cdot \bar{I}$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_C + \bar{Z} \parallel \bar{Z}_L} \quad \text{ce qui donne: } \bar{V}_B - \bar{V}_D = \bar{Z} \parallel \bar{Z}_L \cdot \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_C + \bar{Z} \parallel \bar{Z}_L}$$

$$\Rightarrow \bar{I}' = \frac{\bar{V}_B - \bar{V}_D}{\bar{Z}} = \frac{\bar{Z} \parallel \bar{Z}_L}{\bar{Z}_C + \bar{Z} \parallel \bar{Z}_L} \bar{V} \cdot \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{\frac{\bar{Z} \bar{Z}_L}{\bar{Z} + \bar{Z}_L}}{\bar{Z}_C + \frac{\bar{Z} \bar{Z}_L}{\bar{Z} + \bar{Z}_L}} \cdot \bar{V} \cdot \frac{1}{\bar{Z}}$$

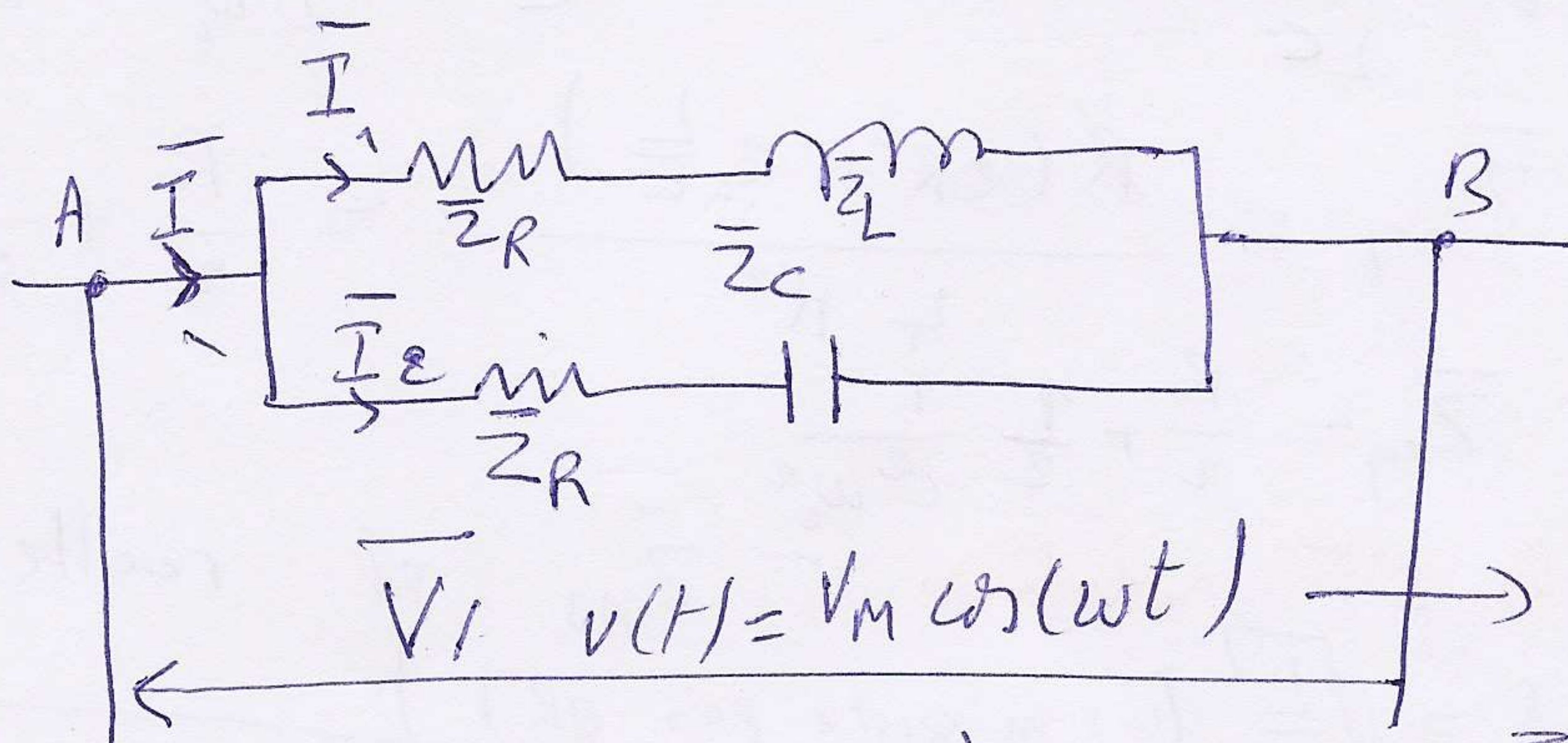
$$= \frac{\cancel{\bar{Z}_L} \bar{V}}{\bar{Z} \bar{Z}_C + \bar{Z} \bar{Z}_L + \bar{Z}_L \bar{Z}_C} \bar{V}$$

Finalement:

$$\bar{I}' = \frac{\bar{Z}_L}{\bar{Z}(\bar{Z}_L + \bar{Z}_C) + \bar{Z}_L \bar{Z}_C} \bar{V} \quad \text{indépendant de } \bar{Z} \quad \text{pour } \boxed{\bar{Z}_L + \bar{Z}_C = 0}$$

ce qui donne $jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = 0 \Rightarrow j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) = 0$
il suffit d'avoir $\boxed{LC\omega^2 = 1}$ c'est la résonance.

Exercice 5



$$\bar{V} = V_M \cdot e^{j\phi_0} \quad \text{c'est la référence des phases}$$

1° $\bar{Z}_{eq}$?

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_{AB} = (\bar{Z}_R + \bar{Z}_L) \parallel (\bar{Z}_R + \bar{Z}_C)$$

$$= \frac{(\bar{Z}_R + \bar{Z}_L)(\bar{Z}_R + \bar{Z}_C)}{2\bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C}$$

$$= \frac{(R + jL\omega)(R - \frac{j}{C\omega})}{2R + jL\omega - \frac{1}{C\omega}} = \frac{(R + jL\omega)(R - \frac{j}{C\omega})(2R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}))}{4R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

$$= \bar{Z}_{AB} e^{j\varphi_{AB}}$$

tout calcul fait

$$\boxed{\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_{AB} = \frac{R(2R^2 + L^2\omega^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}) + j[L\omega - \frac{1}{C\omega}](R^2 - \frac{L}{C})}{4R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

2° Déterminer le déphasage de $i(t)/v(t)$: donc de $\bar{I}/\bar{V}$

On a : $\bar{V} = \bar{Z}_{AB} \cdot \bar{I} \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{AB}} \Rightarrow \text{Arg } \bar{I} = \text{Arg } \bar{V} - \text{Arg } \bar{Z}_{AB}$

$\Rightarrow \text{Arg } \bar{I} = - \text{Arg } \bar{Z}_{AB}$. On posant : $\text{Arg } \bar{I} = \varphi$ et $\text{Arg } \bar{Z}_{AB} = \varphi_{AB}$

$\Rightarrow \boxed{\varphi = -\varphi_{AB}}$ avec $\text{tg } \varphi_{AB} = \frac{(L\omega - 1/c\omega)(R^2 - L/c)}{R(2R^2 + L^2\omega^2 + \frac{1}{C^2\omega^2})}$

3^{ème} quest / A quelle condition sur L, c et ω . L'impédance équivalente est une résistance pure :

$\bar{Z}_{eq} = \text{Re}(\bar{Z}_{eq}) + j\text{Im}(\bar{Z}_{eq})$ équivalente à une résistance pure

$\Rightarrow \text{Im}(\bar{Z}_{eq}) = 0$

ce qui donne $(L\omega - \frac{1}{c\omega})(R^2 - \frac{L}{c}) = 0$

Deux solutions : 1^{ère} sol : $L\omega - \frac{1}{c\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (seulement (+) prise en compte)

impédance équivalente : $L\omega^2 = 1$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$\Rightarrow \bar{Z}_{eq} = \frac{R(2R^2 + L^2\omega_0^2 + \frac{1}{C^2\omega_0^2})}{4R^2} = \bar{Z}_{AB}$

Or : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow L^2\omega_0^2 = \frac{L}{C}$ et $\frac{1}{C^2\omega_0^2} = \frac{L}{C}$

$\Rightarrow \bar{Z}_{eq} = \frac{R(2R^2 + 2\frac{L}{C})}{4R^2} = \frac{R}{2} + \frac{L}{2RC} = \frac{R}{2} + \frac{1}{2R} L^2\omega_0^2$

$\bar{Z}_{eq} = \frac{R}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{C^2\omega_0^2}$

4^{ème} Quelle est la 2^{ème} solution. $\bar{Z}_{AB}$ est réelle aussi pour $R^2 - \frac{L}{c} = 0$

$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (il n'existe pas AR)

$\bar{Z}_{AB} = \frac{R(2R^2 + L^2\omega^2 + \frac{1}{C^2\omega^2})}{4R^2 + (L\omega - \frac{1}{c\omega})^2} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{2\frac{L}{C} + L^2\omega^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}{4\frac{L}{C} + (L\omega - \frac{1}{c\omega})^2}$

1^{ère} et 6^{ème} question

Evaluer $i_1(t)$ et $i_2(t)$ dans les conditions de la 3^{ème} quest

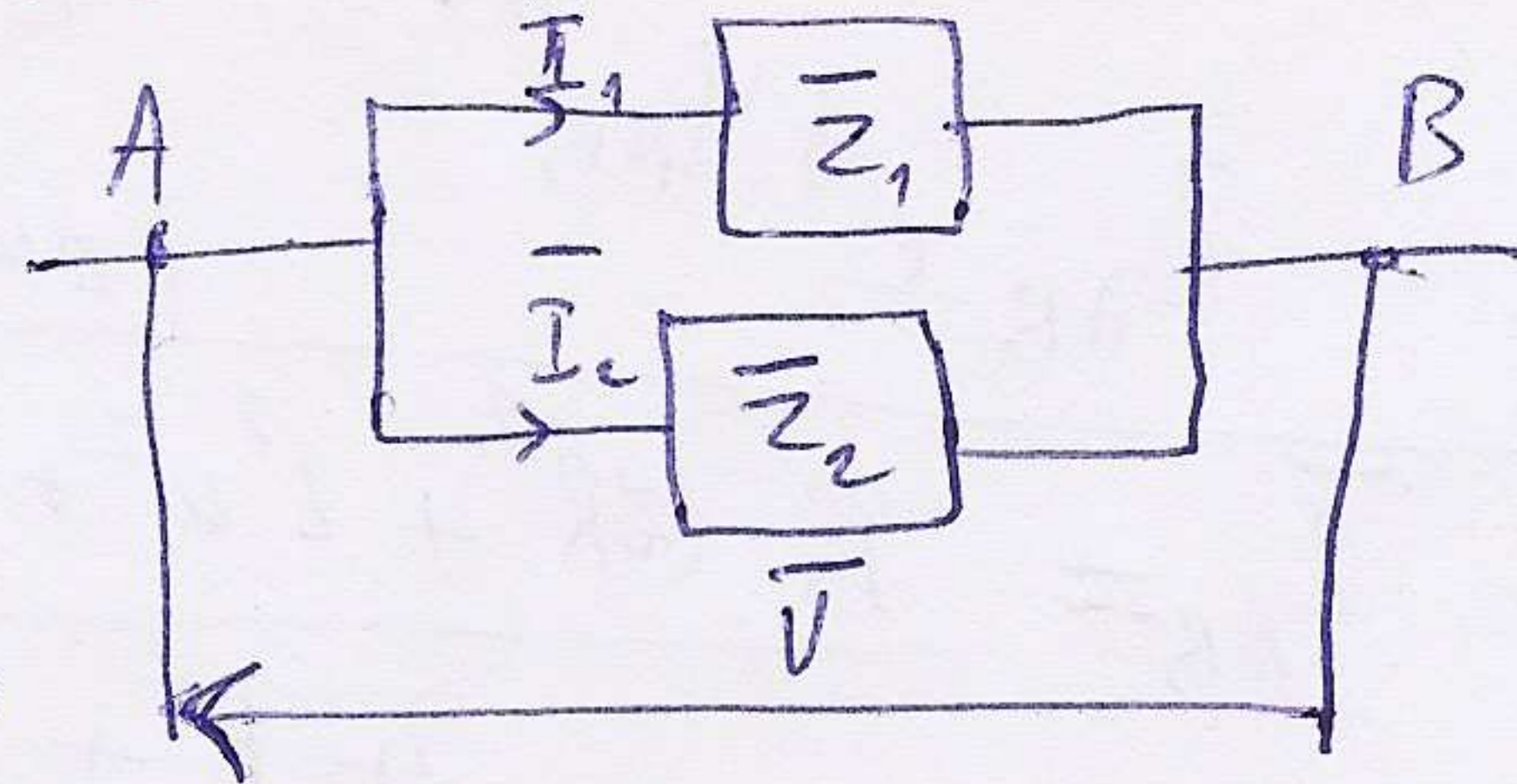
N.B : $L^2\omega^2$ dans polycopé 2 fois si ya une faute

$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L = R + jL\omega$

$\bar{Z}_2 = \bar{Z}_R + \bar{Z}_C = R - \frac{j}{c\omega}$

Dans les conditions de la 3^{ème} quest

$L\omega - \frac{1}{c\omega} = 0 \Rightarrow L\omega = \frac{1}{c\omega}$



Alors $\bar{Z}_2 = \bar{Z}_1$

$$\Rightarrow |\bar{Z}_1| = |\bar{Z}_2| \text{ en outre } \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_1} \text{ et } \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_2}$$

$$\text{Donc } I_{1M} = \frac{|\bar{V}|}{|\bar{Z}_1|} = \frac{V_M}{|\bar{Z}_1|} = I_{2M} = \frac{|\bar{V}|}{|\bar{Z}_2|} = \frac{V_M}{|\bar{Z}_1|}$$

$$\text{on le note } I_M ; \quad I_M = I_{1M} = I_{2M} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

Calcul des phases:

on pose : $\varphi_1 = \text{Arg } \bar{I}_1$ et $\varphi_2 = \text{Arg } \bar{I}_2$

$$\varphi_1 = \text{Arg } \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_1} = \text{Arg } \bar{V} - \text{Arg } (\bar{Z}_1) = -\text{Arg } (\bar{Z}_1) = -\text{Arg } (R + jL\omega)$$

$$\boxed{\text{tg } \varphi_1 = -\frac{L\omega}{R}}$$

$$\text{et } \varphi_2 = \text{Arg } \bar{I}_2 = \text{Arg } \bar{V} - \text{Arg } (\bar{Z}_2) = -\text{Arg } (\bar{Z}_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{tg } \varphi_2 = -\frac{1/c\omega}{R} = \frac{1}{RC\omega}}$$

On en déduit:

$$\bar{I}_1(t) = \bar{I}_1 e^{j\omega t + \varphi_1}$$

$$\bar{I}_1(t) = \bar{I}_1 e^{j\omega t} \text{ et } \bar{I}_2(t) = \bar{I}_2 e^{j\omega t}$$

ce qui donne:

$$i_1(t) = \text{Re} \{ \bar{I}_1(t) \} = I_M \cos(\omega t + \varphi_1) = I_M \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2(t) = \text{Re} \{ \bar{I}_2(t) \} = I_M \cos(\omega t + \varphi_2) = I_M \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\text{or } L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \text{tg } \varphi_2 = -\text{tg } \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 = -\varphi_1$$

$$\Rightarrow i_2(t) = I_M \cos(\omega t - \varphi_1)$$

7° En partant de ces dernières questions, calculer l'intensité totale $i_{\text{tot}}(t)$

$$\text{Loi des noeuds: } i_{\text{tot}}(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_1) + I_M \cos(\omega t - \varphi_1)$$

$$\Rightarrow i_{\text{tot}}(t) = I_M (\cos(\omega t) \cos \varphi_1 - \sin(\omega t) \sin \varphi_1 + \cos \omega t \cos \varphi_1 + \sin \omega t \sin \varphi_1)$$

$$\boxed{i_{\text{tot}}(t) = 2I_M \cos \varphi_1 \cos(\omega t) = I_{M_{\text{tot}}} \cos(\omega t)}$$

$$\text{avec } I_{M_{\text{total}}} = 2I_M \cos \varphi_1$$

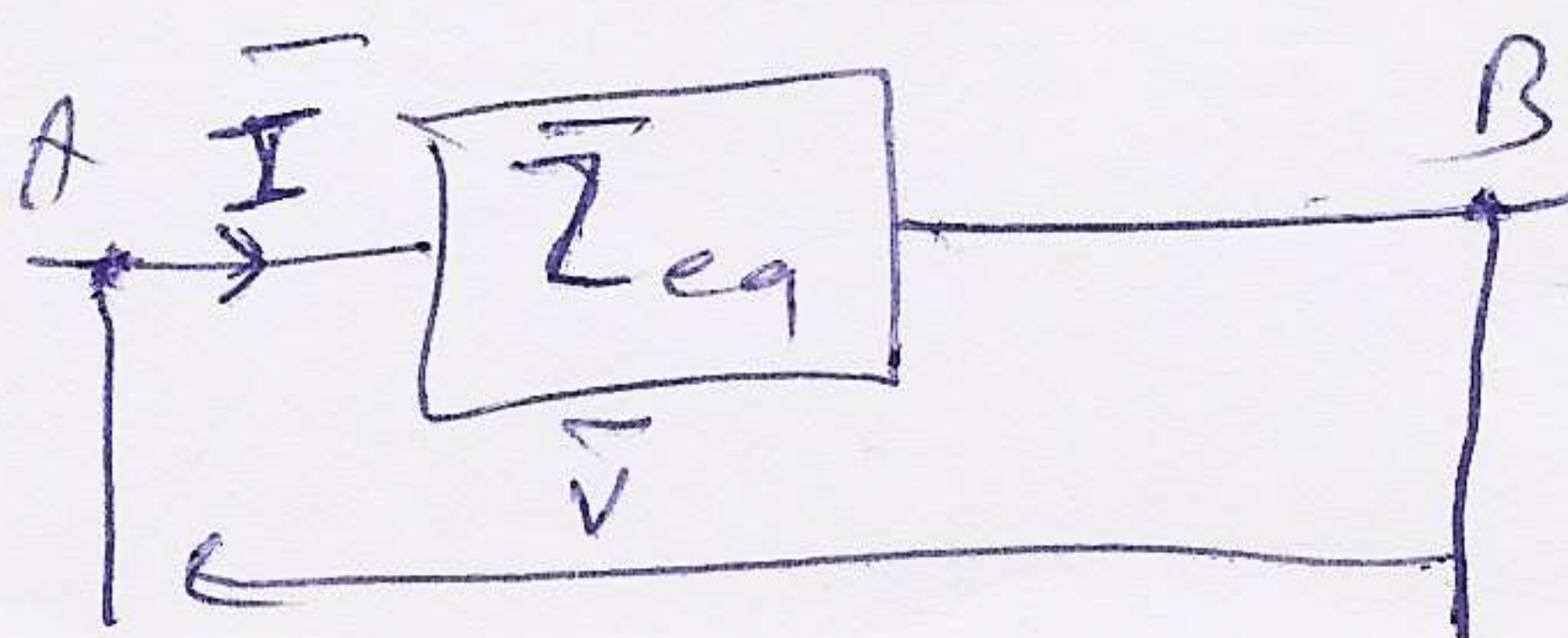
$$\boxed{I_{M_{\text{t}}} = 2 \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_0^2}} \cos \varphi_1}$$

En utilisant l'impédance équivalente

$$\bar{Z}_{\text{eq}} = \bar{Z}_{AB} = \frac{R}{2} + \frac{1}{2R} \cdot \frac{L}{C} = \frac{R}{2} + \frac{1}{2R} L^2 \omega_0^2 = \frac{R}{2} + \frac{1}{2R} \cdot \frac{1}{C^2 \omega_0^2}$$

$$\text{or } \bar{V} = \bar{Z}_{\text{eq}} \bar{I}$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{\text{eq}}} = \frac{V_M}{\frac{R}{2} + \frac{1}{2R} \cdot \frac{L}{C}}$$



$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{2R}{R^2 + \frac{L}{C}} \cdot V_M$$

$$\bar{I} = \frac{2R}{R^2 + L^2 \omega_0^2} V_M$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{Mf} = |\bar{I}| = \frac{2R}{R^2 + L^2 \omega_0^2} V_M}$$

Conclusion:

$$\frac{2 V_M}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_0^2}} \cos \varphi_1 = \frac{2R}{R^2 + L^2 \omega_0^2} V_M$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_0^2}}$$